PROBLEMA 1

TEMA: MODELO DE EQUILIBRIO. Fuerzas de volumen y fuerzas de superficie. Identificación y equilibrio

Un sólido prismático de base cuadrada de arista a, altura h y densidad ρ_s se sumerge en un líquido de densidad $\rho_l > \rho_s$, quedando inicialmente tal como se indica en la representación plana de la Figura 1.1. Se pide:

1º) Determinar y representar las fuerzas de volumen y de superficie sobre el sólido en su posición inicial y en su posición final de equilibrio.

2º) Teniendo en cuenta que $h > a$, discutir la estabilidad del equilibrio final.

3º) En caso de que el recipiente gire alrededor del eje vertical *AA'* con una velocidad angular constante ω, razonar las modificaciones que experimentan las fuerzas sobre el sólido, así como su situación final de equilibrio.

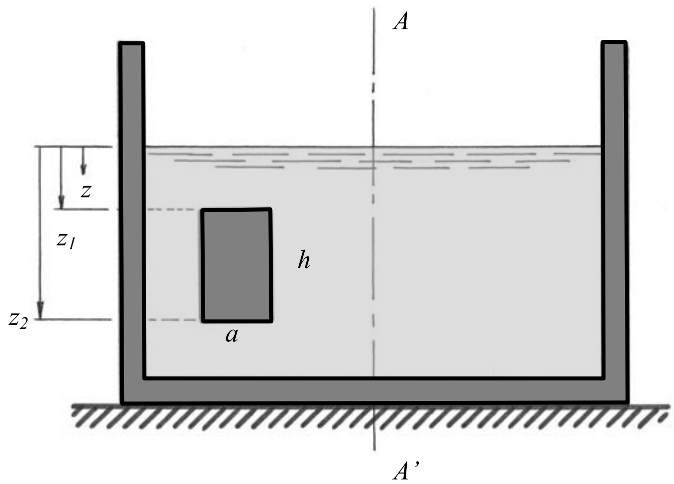

Fig. 1.1

SOLUCIÓN

1º) **Fuerzas de volumen**

La única fuerza de volumen que experimenta el sólido es la debida al campo gravitatorio. Sobre cada elemento de volumen del sólido, dV, para la referencia de la figura y siendo g la aceleración de la gravedad y dm la masa del elemento, se tiene una fuerza dada por:

$$dm\, g\, \vec{k} = \rho_s\, dV\, g\, \vec{k} \qquad \left[kg \cdot m/s^2 \equiv N\right]$$

Y el vector de fuerzas de volumen será: $\vec{f}_{Vg}(0,0,\rho_s g) \qquad \left[N/m^3\right]$

La resultante de esta fuerza se aplica en el centro de gravedad del sólido y es el peso del mismo:

$$\vec{P}_s = \rho_s\, g V\, \vec{k} = \rho_s\, g\, h\, a^2\, \vec{k} \qquad [N]$$

Fuerzas de superficie en la posición inicial

En la posición inicial, y despreciando la presión atmosférica, las fuerzas de superficie están constituidas por la presión hidrostática: $p = \rho_l \, g \, z \quad [N/m^2]$.

En la Figura 1.2 se tiene la correspondiente representación plana.

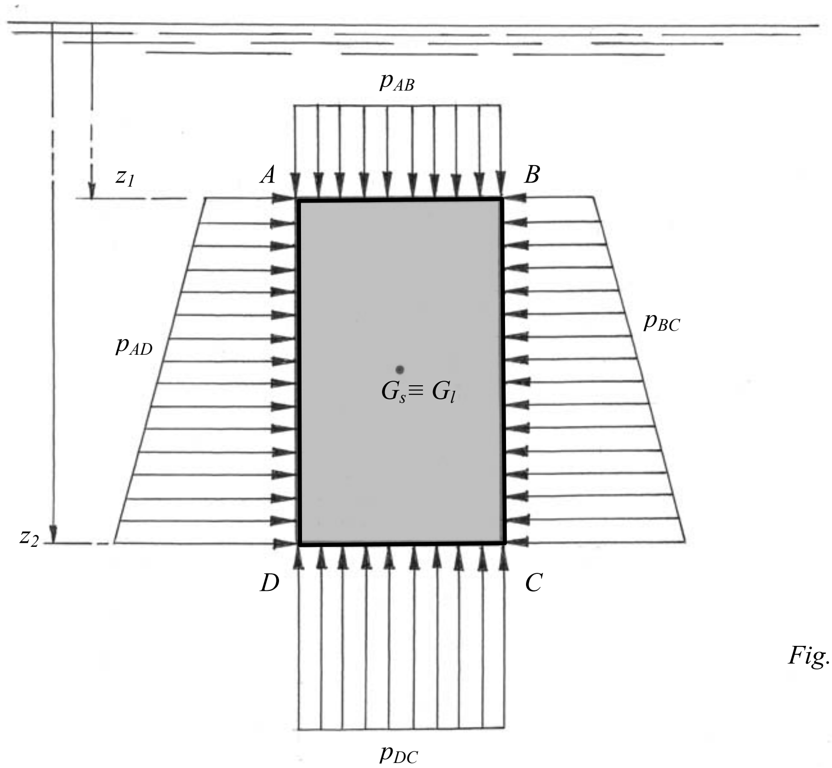

Fig. 1.2

Las presiones de las caras laterales, p_{AD} y p_{BC}, se cancelan, en tanto que la resultante de fuerza de las presiones de las bases, p_{AB} y p_{DC}, es:

$$\vec{R} = p_{AB}\, a^2 \vec{k} - p_{DC}\, a^2 \vec{k} = a^2 (p_{AB} - p_{DC})\vec{k} =$$
$$= a^2 \rho_l \, g (z_1 - z_2)\vec{k} = -a^2 \rho_l \, g \, h \, \vec{k} \qquad [N]$$

Esta fuerza va dirigida hacia arriba, es igual al peso del volumen del líquido desplazado por el sólido y está aplicada en el centro de gravedad de dicho volumen, G_l, que, siendo el sólido homogéneo, coincide con el propio centro de gravedad del sólido, G_s (Principio de Arquímedes).

Fuerzas de superficie en la situación final de equilibrio

Sobre $G_l \equiv G_s$ actúa, por tanto, una fuerza total de expresión:

$$\vec{P}_s + \vec{R} = g \, h \, a^2 (\rho_s - \rho_l)\vec{k} \qquad [N]$$

como $\rho_l > \rho_s$, hay una resultante neta hacia arriba y el sólido se desplaza en ese sentido, quedando en una situación final de equilibrio flotando parcialmente, tal como se indica en la representación plana de la Figura 1.3. En la misma figura se han representado las correspondientes presiones del fluido sobre las caras.

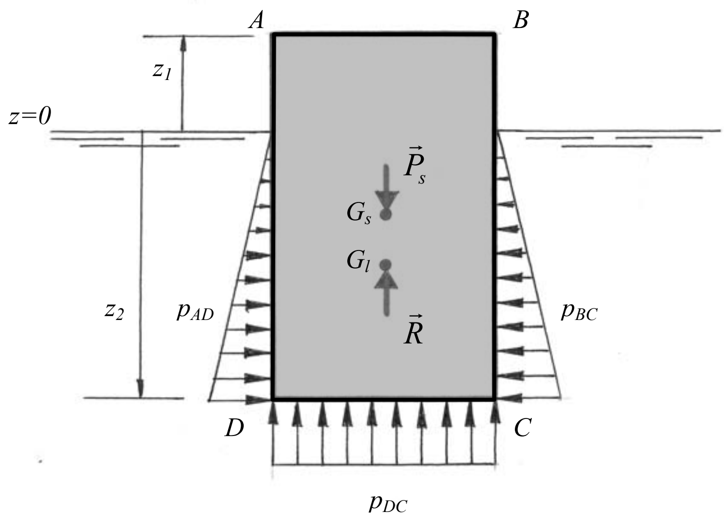

Fig. 1.3

Ahora no hay presión en las áreas sin contacto con el fluido, las presiones laterales se siguen cancelando, y la presión sobre la base inferior tiene por resultante:

$$\vec{R} = -a^2 p_{DC}\vec{k} = -a^2 \rho_l g(h - z_1)\vec{k} \qquad [N]$$

que, al haber equilibrio, debe ser igual al peso del sólido: $\vec{P}_s = \rho_s g\, h\, a^2\, \vec{k} \qquad [N]$

Igualando se despeja la cota z_1 correspondiente a la parte del sólido que queda emergida del líquido: $z_1 = h\left(\dfrac{\rho_s}{\rho_l} - 1\right) \qquad [m]$

2º) **Estabilidad del equilibrio**

En la posición de equilibrio, el centro de gravedad del volumen del líquido desplazado, G_l, no coincide con el centro de gravedad del sólido, G_s. Por tanto, cualquier perturbación provocará el desalineamiento de las fuerzas $\vec{P}_s$ y $\vec{R}$, generando un par que tenderá a volcar el sólido para dejarlo en una nueva posición de equilibrio más estable al quedar más próximos G_l y G_s.

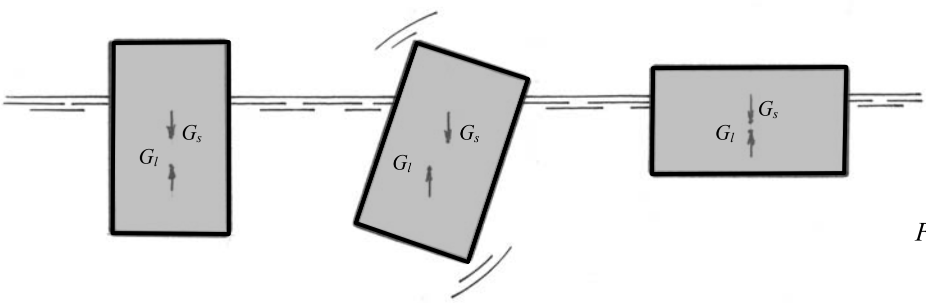

Fig. 1.4

3º) **Fuerza de volumen adicional debida al giro del recipiente**

Al girar el recipiente alrededor del eje vertical con una velocidad angular constante ω, se alcanza un régimen estacionario en el que todos los puntos del líquido giran alrededor del eje vertical con la misma velocidad angular ω. El espacio ocupado por el líquido es asiento de dos campos de fuerza simultáneos que originan las presiones existentes en el líquido: el campo de fuerzas de gravedad y el campo inercial de las fuerzas centrífugas. En la Figura 1.5 se representan los correspondientes vectores de fuerzas de volumen, $\vec{f}_{Vg}\ \vec{f}_{Vc}\ \left[N/m^3\right]$, sobre un elemento de volumen de líquido situado a una distancia x del eje de giro.

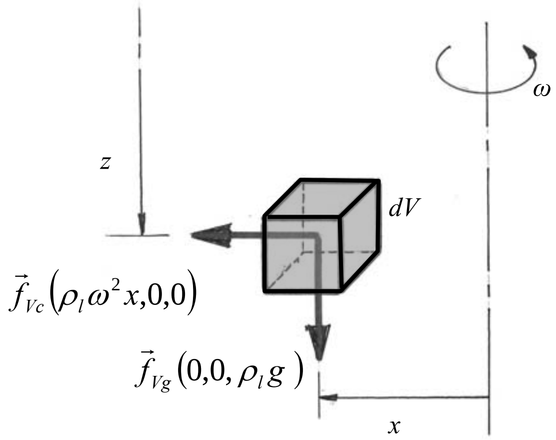

Fig. 1.5

Las paredes laterales del recipiente transmiten fuerzas de reacción impidiendo que el líquido escape. Éste alcanza una configuración de equilibrio con la superficie en forma de paraboloide (superficie equipotencial de los dos campos de fuerza). Sobre cada elemento de volumen se transmiten presiones cuya resultante equilibra a la de las fuerzas de volumen. Análogamente al empuje de Arquímedes, se tiene una componente de esa resultante, de expresión $\rho_l \omega^2 x\, dV\ (-\vec{i}\,)$, que constituye la fuerza centrípeta que equilibra a la centrífuga.

Considerando ahora un elemento de volumen del sólido sumergido en el líquido, las fuerzas centrífuga y centrípeta serán, respectivamente: $\rho_s \omega^2 x\, dV\ \vec{i}$ y $\rho_l \omega^2 x\, dV\ (-\vec{i}\,)$. Y al ser $\rho_s < \rho_l$ el elemento de volumen del sólido se verá sometido a una fuerza motriz de expresión $(\rho_s - \rho_l)\omega^2 x\, dV\, \vec{i}$ siendo proyectado hacia el eje de rotación. En la Figura 1.6 se tiene una representación de la situación final de equilibrio (para mayor claridad se ha supuesto que el sólido no ha volcado).

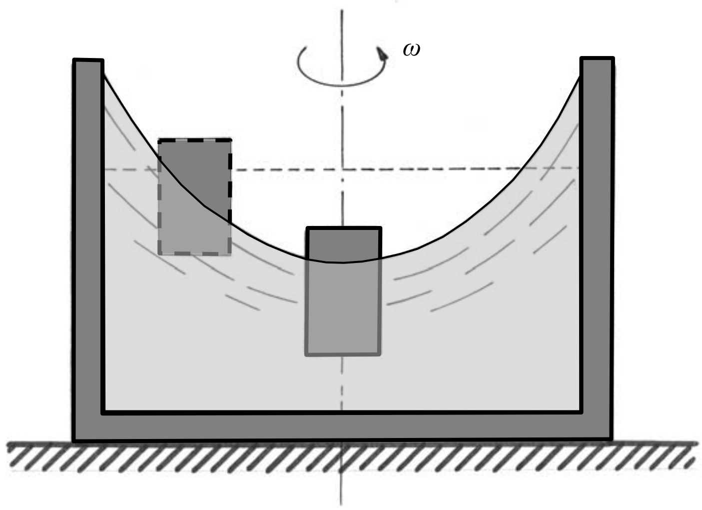

Fig. 1.6