PROBLEMA 10

TEMA: MODELO CINEMÁTICO. Campo compatible de deformaciones a partir de la deformada. Obtención de desplazamientos por integración de las deformaciones. Galgas extensométricas

El paralelepípedo recto de la Figura 10.1 se deforma tal como se indica en la Figura 10.2. Esta deformación es debida a la aplicación de una solicitación de flexión pura, y sus características son las siguientes:

.- El origen del sistema de referencia se mantiene inmóvil

.- Las secciones rectas (z=*cte.*) se mantienen planas y giran como sólido rígido alrededor del eje y

.- En cada sección recta, las rectas inicialmente paralelas a x se convierten en rectas convergentes en un punto, alargándose por encima del eje y y acortándose por debajo

.- Las rectas inicialmente paralelas a y se convierten en arcos de circunferencia concéntricos, aumentando su longitud si están por encima del eje y y disminuyéndola si están por debajo

.- Las rectas inicialmente paralelas al eje z se convierten en arcos de circunferencia concéntricos, disminuyendo su longitud si están por encima del plano yz y aumentándola si están por debajo

.- Los ángulos de todos los vértices se mantienen rectos

Suponiendo que todos los movimientos son pequeños, se pide:

1º) Campo continuo de deformaciones más sencillo congruente con la transformación descrita

2º) Campo de desplazamientos correspondiente

3º) Discutir si para el estado de formaciones de este problema puede emplearse una galga extensométrica de longitud l_0 para medir exactamente la deformación longitudinal unitaria en un punto de la superficie

4º) Idem para cualquier estado de deformaciones

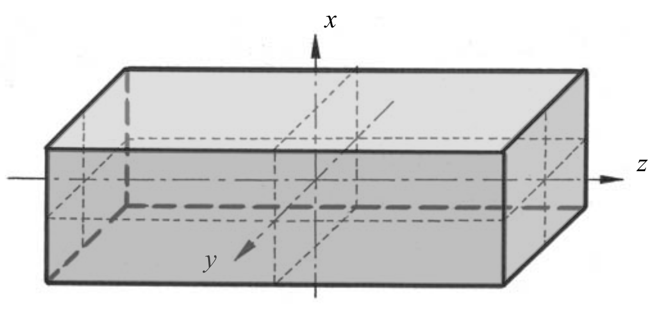

Fig. 10.1

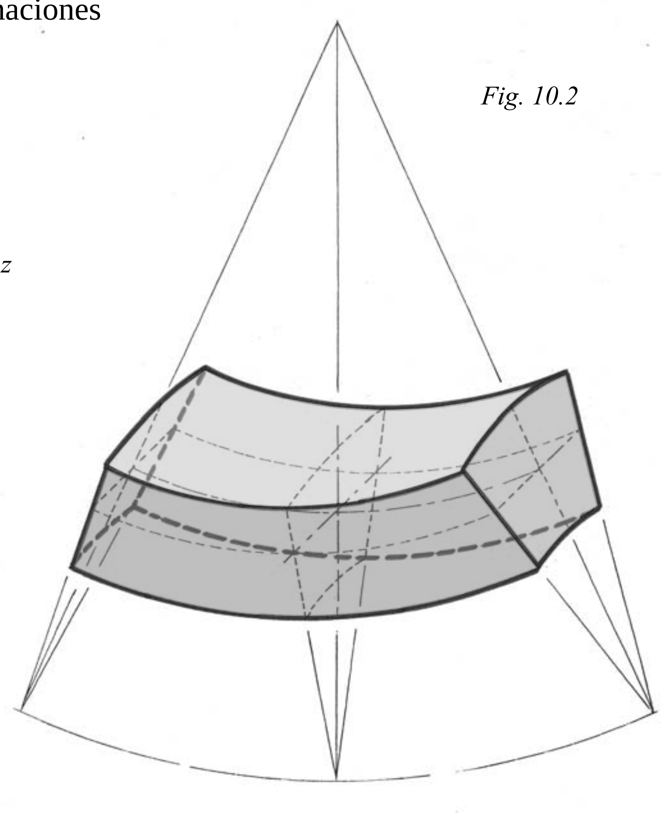

Fig. 10.2

SOLUCIÓN

1º) **Campo de deformaciones**

Dado que todos los ángulos de los vértices permanecen invariables, y que, por la transformación descrita, esto es extensible a los ángulos de los vértices del entorno paralelepipédico de cualquier punto orientado según el sistema de referencia, podemos considerar que las componentes rectangulares del tensor de deformaciones son nulas en todo el prisma: $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$. Así mismo, las componentes de la diagonal mayor de ***D*** son independientes de y y de z. La ε_{xx} y la ε_{yy} tienen el signo de la x, en tanto que la ε_{zz} tiene signo contrario al de la x.

La continuidad del medio queda asegurada si las componentes de ***D*** verifican las condiciones de compatibilidad. Dado que éstas constituyen un sistema de ecuaciones en derivadas segundas parciales, se verificarán automáticamente si las componentes de ***D*** son lineales con las coordenadas.

Por consiguiente, el campo de deformaciones más sencillo congruente con la transformación descrita es:

$$\varepsilon_{xx} = k_1 x \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = k_2 x \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = -k_3 x \quad ; \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

siendo k_1 , k_2 y k_3 constantes positivas.

2º) **Campo de desplazamientos**

Los desplazamientos se obtienen por integración de las deformaciones. Primero se obtienen los diferenciales del vector giro:

$$d\omega_x = \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) dx + \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \right) dy + \left(\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial z} \right) dz = 0$$

$$d\omega_y = \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) dy + \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \right) dz = k_3 dz$$

$$d\omega_z = \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) dz = k_2 dy$$

Integrando se obtienen los giros: $\omega_x = \alpha \quad ; \quad \omega_y = k_3 z + \beta \quad ; \quad \omega_z = k_2 y + \gamma$, siendo α , β , y γ las constantes de integración.

A continuación se obtienen las expresiones diferenciales de los desplazamientos:

$$du = \varepsilon_{xx} dx + \left(\varepsilon_{xy} - \omega_z \right) dy + \left(\varepsilon_{xz} - \omega_y \right) dz = k_1 x\, dx - \left(k_2 y + \gamma \right) dy + \left(k_3 z + \beta \right) dz$$
$$dv = \left(\varepsilon_{xy} + \omega_z \right) dx + \varepsilon_{yy} dy + \left(\varepsilon_{yz} - \omega_x \right) dz = \left(k_2 y + \gamma \right) dx + k_2 x\, dy - \alpha\, dz$$
$$dw = \left(\varepsilon_{xz} - \omega_y \right) dx + \left(\varepsilon_{yz} + \omega_x \right) dy + \varepsilon_{zz} dz + = -\left(k_3 z + \beta \right) dx + \alpha\, dy - k_3 x\, dz$$

cuya integración da:

$$u = k_1 \frac{x^2}{2} - k_2 \frac{y^2}{2} - \gamma y + k_3 \frac{z^2}{2} + \beta z + a$$
$$v = k_2 x\, y + \gamma x - \alpha z + b$$
$$w = -k_3 z\, x - \beta x + \alpha y + c$$

Las dos ternas de constantes de integración α , β , γ y a , b , c representan, respectivamente, el giro y la traslación de todo el paralelepípedo como sólido rígido respecto al origen de coordenadas. Según el enunciado estos movimientos no se producen, por lo que todas las constantes de integración son nulas, quedando:

$$u = k_1 \frac{x^2}{2} - k_2 \frac{y^2}{2} - \gamma y + k_3 \frac{z^2}{2} \quad ; \quad v = k_2 x\, y \quad ; \quad w = -k_3 z\, x$$

3º) **<u>Medida de la deformación longitudinal unitaria con una galga extensométrica cuando el campo de deformaciones es lineal</u>**

En la Figura 10.3 se tiene una galga de longitud l_0 pegada en la dirección x. La lectura de la galga es la relación entre el alargamiento que experimenta y su longitud inicial: $\Delta l / l_0$. Para un estado de deformaciones lineal como el del problema, la lectura de la galga coincide con la deformación longitudinal unitaria, $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, del punto medio, P , de la galga, ya que:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \varepsilon_{xx} dx}{l_0} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} k_1 x dx}{l_0} = \frac{k_1 \left(x_2^2 - x_1^2\right)}{2 l_0} = k_1 \frac{x_2 - x_1}{l_0} \frac{x_2 + x_1}{2} = k_1 x_P = \varepsilon_{xx}\left(x_P\right)$$

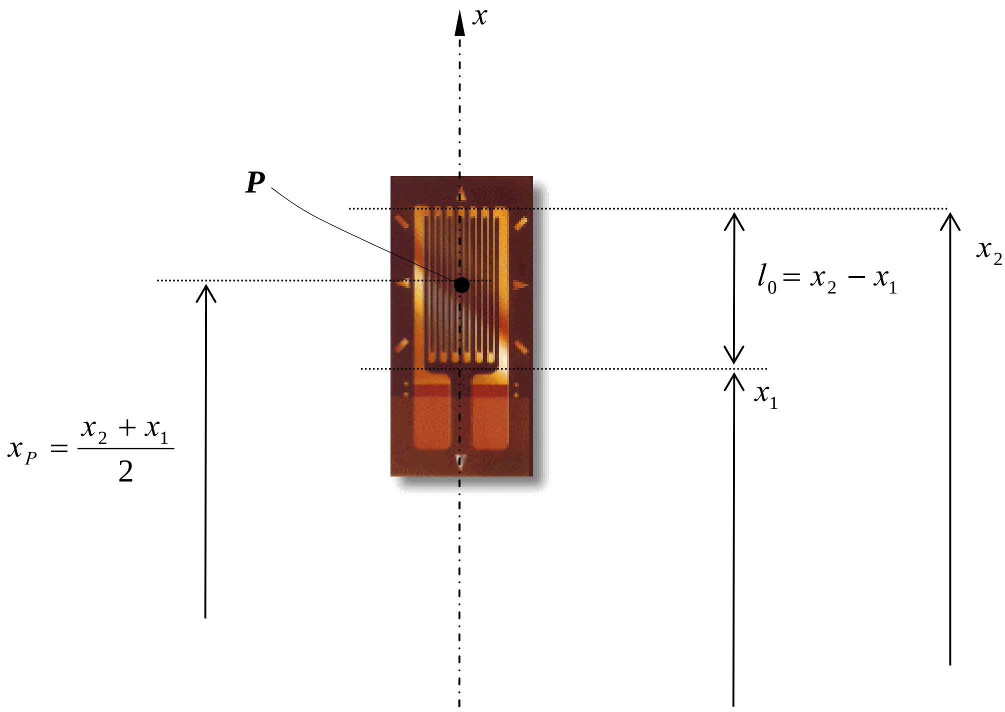

Fig. 10.3

4º) **Medida de la deformación longitudinal unitaria con una galga extensométrica para un caso general de campo de deformaciones**

Con deformaciones no lineales, la igualdad entre la lectura de la galga,

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\int_{u_1}^{u_2} du}{l_0} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x} dx}{l_0} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \varepsilon_{xx} dx}{l_0}$$

y la deformación longitudinal unitaria en el punto medio de la galga

$$\varepsilon_{xx}(x_P) = \varepsilon_{xx}\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)$$

se verifica solamente para una longitud de galga infinitesimal: $l_0 = x_2 - x_1 = dx$.

Dado que la longitud de una galga convencional es una magnitud finita (típicamente: $l_0 = 6mm$), es en general incorrecto igualar la lectura de la galga a la deformación longitudinal en el punto central de la misma, pudiendo cometerse graves errores que muchas veces se omiten en las aplicaciones técnicas.