PROBLEMA 6

TEMA: MODELO CINEMÁTICO. A partir de un campo de desplazamientos plano, determinación de los tensores ***A*** y ***D***. Transformación de entornos superficiales

Una pieza plana rectangular, *hxl,* empotrada en un extremo sufre la deformación que se indica a trazo fino en la Figura 6.1: las rectas $y = cte$ se convierten en arcos de circunferencia concéntricos incrementando su longitud si están por debajo del eje x o disminuyéndola si están por encima, y las rectas $x = cte$ giran sin deformación manteniéndose perpendiculares a las deformadas de las rectas $y = cte.$ Las correspondientes ecuaciones de transformación son:

$$x' = \left(\frac{2l}{\pi} - y\right) sen\, \frac{\pi}{2l}x \quad ; \quad y' = \frac{2l}{\pi} - \left(\frac{2l}{\pi} - y\right)\cos\frac{\pi}{2l}x \quad ; \quad z' = z$$

Se pide:

1º) Componentes del vector desplazamiento $\vec{u}$. Comprobar que verifican las condiciones de contorno en el empotramiento

2º) Tensor gradiente del campo de desplazamientos, ***A***.

3º) En los puntos del empotramiento ($x=0$) y en los puntos del extremo libre ($x=l$), discutir si las componentes de ***A*** pueden considerarse infinitesimales (inferiores a la centésima) y para qué valores de la relación h/l

4º) Tensor de deformación, ***D***

5º) Para el caso: $l=150mm,\ h=40mm$, se considera un entorno superficial de forma cuadrada en los dos puntos de los vértices del extremo libre *Q(150;-20)mm* y *T(150;20)mm*. Determine y represente todos los movimientos experimentados por ambos entornos.

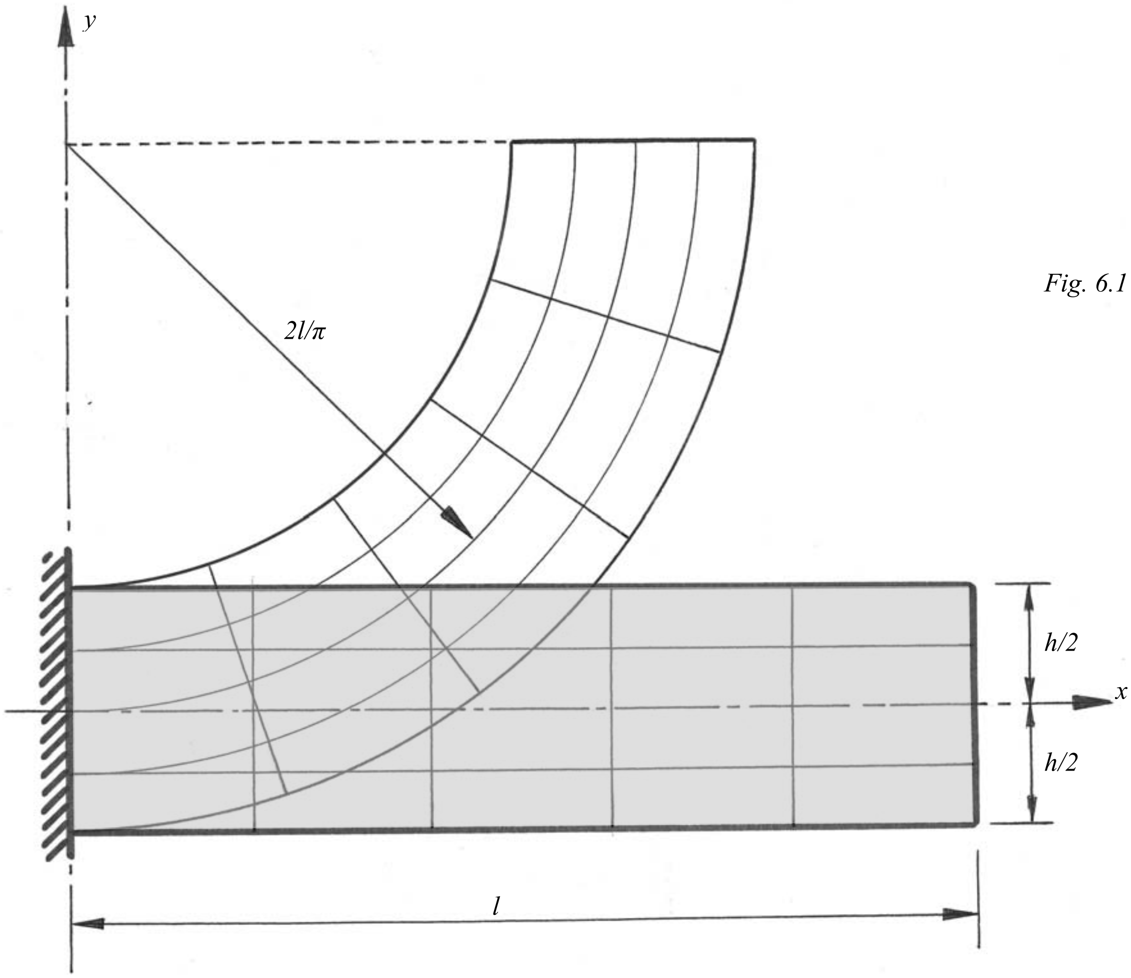


Fig. 6.1

SOLUCIÓN

1º) **Componentes del vector desplazamiento** $\vec{u}(u,v,w)$

$$u = x' - x = \left(\frac{2l}{\pi} - y\right) sen\,\frac{\pi}{2l}x - x$$

$$v = y' - y = \frac{2l}{\pi} - \left(\frac{2l}{\pi} - y\right)\cos\frac{\pi}{2l}x - y$$

$$w = z' - z = 0$$

En el empotramiento (*x=0*) se tiene como condición de contorno, que todos los desplazamientos son nulos. Efectivamente, se comprueba que:

$$u(0,y) = v(0,y) = w(0,y) = 0$$

2º) **Tensor gradiente del campo de desplazamientos**

$$A = \nabla\vec{u} = \begin{bmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial z/\partial z \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las componentes del vector desplazamiento, se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(1 - \frac{\pi}{2l}y\right)\cos\frac{\pi}{2l}x - 1 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -sen\,\frac{\pi}{2l}x \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(1 - \frac{\pi}{2l}y\right) sen\,\frac{\pi}{2l}x \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos\frac{\pi}{2l}x - 1 \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

3º) **Discusión sobre el carácter infinitesimal de *A* en el empotramiento**

En el empotramiento (*x=0*) todas las componentes de ***A*** son nulas, salvo $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\pi}{2l}y$ que es máxima para $y = \pm h/2$, luego: $máx\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| = \frac{\pi}{4}\frac{h}{l}$, que es inferior a *0,01* para

$$h/l < 4{\cdot}0{,}01/\pi = 0{,}0127 = 1/78{,}74$$

Por tanto, en el empotramiento, la única componente no nula del tensor gradiente del campo de desplazamientos, $\partial u/\partial x$, sólo puede considerarse infinitesimal (inferior a

0,01) cuando la longitud *l* de la pieza es igual o superior a *78,74* veces la altura *h* (en la Figura 6.2 se tiene una representación a escala)

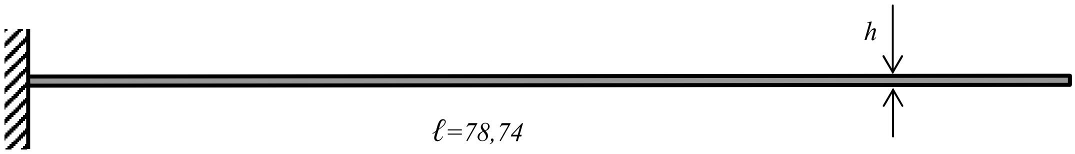


Fig. 6.2

Discusión sobre el carácter infinitesimal de *A* en el extremo libre

En el extremo libre ($x=l$) las componentes no nulas de ***A*** son: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=-1$, que, obviamente, siempre son finitas.

La componente no nula restante es: $\frac{\partial v}{\partial x}=1-\frac{\pi}{2l}y$, que sólo será inferior a *0,01* para $y>(1-0{,}01)\cdot 2l/\pi$. Es decir, el primer punto para el cual la componente es infinitesimal será el vértice superior ($y=h/2$), lo que ocurrirá para *h/l=1,26* (en la Figura 6.3 se tiene una representación a escala, se ha indicado a trazo fino la deformada)

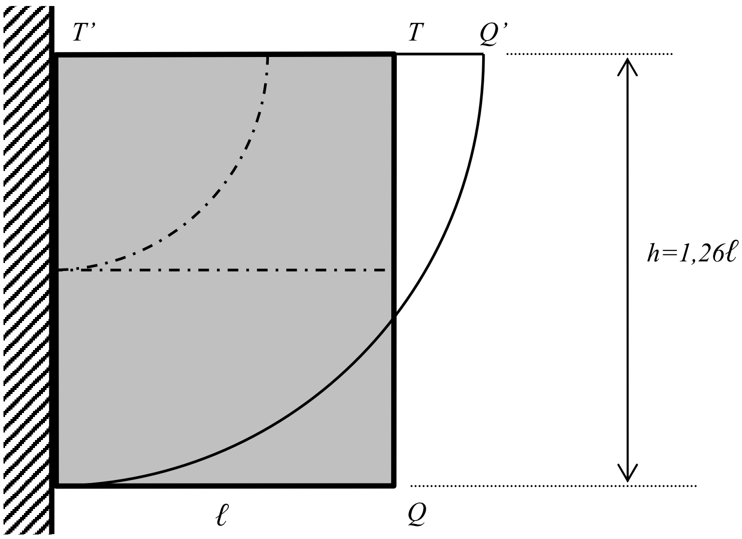


Fig. 6.3

4º) **Tensor de deformación *D***

Como consecuencia del apartado anterior, la relación entre las componentes del vector desplazamiento, $\vec{u}$, y las componentes del tensor de deformación ***D*** es no lineal para cualquier relación *h/l* , luego, como expresión del tensor deformación debe utilizarse:

$$D=\frac{1}{2}\left(A+A^T+A^T A\right)=\begin{pmatrix}\in_{xx} & \in_{xy} & \in_{xz}\\ \in_{xy} & \in_{yy} & \in_{yz}\\ \in_{xz} & \in_{yz} & \in_{zz}\end{pmatrix}$$

Sustituyendo los desplazamientos en las expresiones de las componentes se obtiene:

$$\in_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]=\frac{\pi}{2l}y\left(\frac{\pi}{4l}y-1\right)$$

$$\in_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]=0$$

$$\in_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]=0$$

$$\in_{xy}=\in_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0$$

$$\in_{yz}=\in_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

$$\in_{xz}=\in_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

5º) **Vectores desplazamiento de los puntos de los vértices del extremo libre *Q* y *T***

Teniendo en cuenta que *l=150mm* y *h=40mm,* y particularizando la expresión de los desplazamientos del primer apartado, se obtiene:

Para el punto *Q(150mm,-20mm):* u_Q=-34,5mm , v_Q=115,5mm , w_Q=0

Para el punto T*(150mm,20mm):* u_T=-74,5mm , v_T= 75,5mm , w_T=0

Deformaciones longitudinales en el entorno de *Q* y *T*

La expresión de la deformación longitudinal verdadera de un vector $d\vec{r}=dr\,\vec{n}$, de origen en un punto *P* es: $e(P,\vec{n})=\ln\frac{dr'}{dr}=\frac{1}{2}\ln\left(1+2\vec{n}^T D\vec{n}\right)$, luego, la longitud final del vector es: $dr'=\sqrt{1+2\vec{n}^T D\vec{n}}\cdot dr$.

Teniendo en cuenta las expresiones de las componentes de la matriz ***D*** obtenidas en el apartado anterior, consideramos los puntos del entorno de *Q* y *T* señalados en la Figura 6.4:

Para el punto Q_x : *dr=dx* y $\vec{n}=-\vec{i}$, luego:

$$dx'=\sqrt{1+2\in_{xx}}\cdot dx=\sqrt{1+2\frac{\pi}{2\cdot 150}(-20)\left(\frac{\pi}{2\cdot 150}(-20)-1\right)}\cdot dx=1{,}2094\,dx$$

Para el punto Q_y : *dr=dy* y $\vec{n}=\vec{j}$, luego: $dy'=\sqrt{1+2\in_{yy}}\cdot dy=dy$

Para el punto T_x : $dr=dx$ y $\vec{n} = -\vec{i}$, luego:

$$dx' = \sqrt{1+2 \in_{xx}} \cdot dx = \sqrt{1+2\frac{\pi}{2\cdot150}20\left(\frac{\pi}{2\cdot150}20-1\right)} \cdot dx = 0{,}8178\,dx$$

Para el punto T_y : $dr=dy$ y $\vec{n} = -\vec{j}$, luego: $dy' = \sqrt{1+2 \in_{yy}} \cdot dy = dy$

<u>Deformaciones angulares en el entorno de *Q* y *T*</u>

La expresión de la deformación angular en el entorno de un punto P para dos direcciones inicialmente perpendiculares de vectores unitarios $\vec{n}_s$ y $\vec{n}_t$ es:

$$c(P,\vec{n}_s,\vec{n}_t) = arc\ sen \frac{2\,\vec{n}_s^{\,T} D\,\vec{n}_t}{\exp(e_s+e_t)}$$

Particularizando para los puntos Q y T:

Punto Q: $\vec{n}_s = -\vec{i}$; $\vec{n}_t = \vec{j}$; $e_s = e(Q,-\vec{i}) = \ln\frac{1{,}2094dx}{dx} = 0{,}19$; $e_t = e(Q,\vec{j}) = 0$

luego: $$c(Q,-\vec{i},\vec{j}) = arc\ sen \frac{2\left(-\vec{i}\right)^T D\,\vec{j}}{\exp(e_s+e_t)} = arc\ sen\frac{-2\in_{xy}}{\exp(0{,}19+0)} = 0$$

Punto T: $\vec{n}_s = -\vec{i}$; $\vec{n}_t = -\vec{j}$; $e_s = e(T,-\vec{i}) = \ln\frac{0{,}8178dx}{dx} = -0{,}2$; $e_t = e(T,-\vec{j}) = 0$

luego: $$c(T,-\vec{i},-\vec{j}) = arc\ sen \frac{2\left(-\vec{i}\right)^T D\left(-\vec{j}\right)}{\exp(e_s+e_t)} = arc\ sen\frac{2\in_{xy}}{\exp(-0{,}2+0)} = 0$$

En la Figura 6.4 se han reflejado los movimientos hallados:

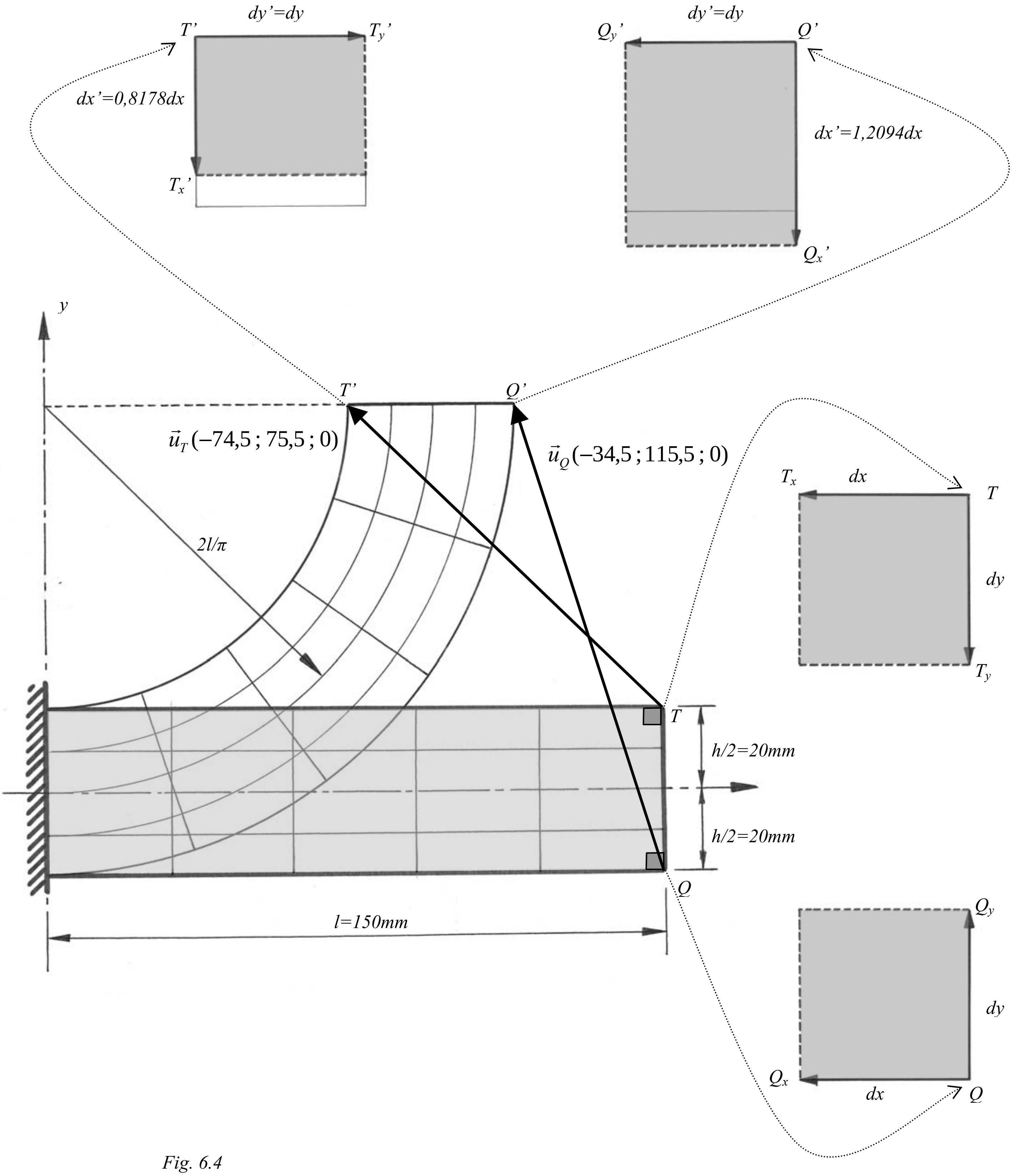
.- Los puntos P y Q experimentan, respectivamente, los desplazamientos:

$$\vec{u}_Q(-34{,}5\,;115{,}5\,;0) \quad \text{y} \quad \vec{u}_T(-74{,}5\,;75{,}5\,;0)$$

.- En el entorno del punto Q de lados paralelos a xy , el lado paralelo a x sufre un alargamiento, el lado paralelo a y no cambia de longitud y los ángulos de los vértices se mantienen rectos

.- En el entorno del punto T de lados paralelos a xy , el lado paralelo a x sufre un acortamiento, el lado paralelo a y no cambia de longitud y los ángulos de los vértices se mantienen rectos.

.- Ambos entornos experimentan un giro como sólido rígido de *90°* en sentido antihorario. Al tratarse de un giro obviamente finito, no queda explícito en las matrices ***A*** y ***D***



dy'=dy
T'
T_y'
dx'=0,8178dx
T_x'
dy'=dy
Q_y'
Q'
dx'=1,2094dx
Q_x'
y
T'
Q'
$\vec{u}_T(-74{,}5\,;\,75{,}5\,;\,0)$
$\vec{u}_Q(-34{,}5\,;\,115{,}5\,;\,0)$
T_x
dx
T
dy
T_y
2l/π
T
h/2=20mm
h/2=20mm
Q
l=150mm
Q_y
dy
Q_x
dx
Q

Fig. 6.4