PROBLEMA 8

TEMA: MODELO CINEMÁTICO. Campo de desplazamientos lineal. Deformaciones y giros infinitesimales. Incremento de volumen. Representación gráfica

La placa rectangular de la Figura 8.a es de *1mm* de espesor y experimenta un campo de desplazamientos que se estudia con técnicas de extensometría eléctrica y mecánica. Con extensometría eléctrica se comprueba que la medición de una galga es constante en todo punto si se mantiene invariable la orientación de la misma. Con extensometría mecánica se miden los desplazamientos en el plano *xy* de los cuatro vértices, obteniéndose (en *mm*):

$$\vec{u}_A = 0\vec{i} + 0\vec{j} \quad ; \quad \vec{u}_B = 1{,}2\vec{i} + 0{,}4\vec{j} \quad ; \quad \vec{u}_C = 0{,}4\vec{i} - 0{,}4\vec{j} \quad ; \quad \vec{u}_D = -0{,}8\vec{i} - 0{,}8\vec{j}$$

Considerando nula en todo punto la componente del desplazamiento según z , se pide:

1º) Expresión de los desplazamientos en toda la placa
2º) Tensor gradiente del campo de desplazamientos
3º) Tensor de deformaciones comprobando que puede considerarse infinitesimal
4º) Tensor de giro y vector giro
5º) Incremento de volumen
6º) Dibujar la deformada de la placa aplicando a los desplazamientos un factor de ampliación de *200*
7º) Representar la deformada de un entorno cuadrado del vértice ***A*** aplicando a los giros un factor de ampliación de *12,5π*

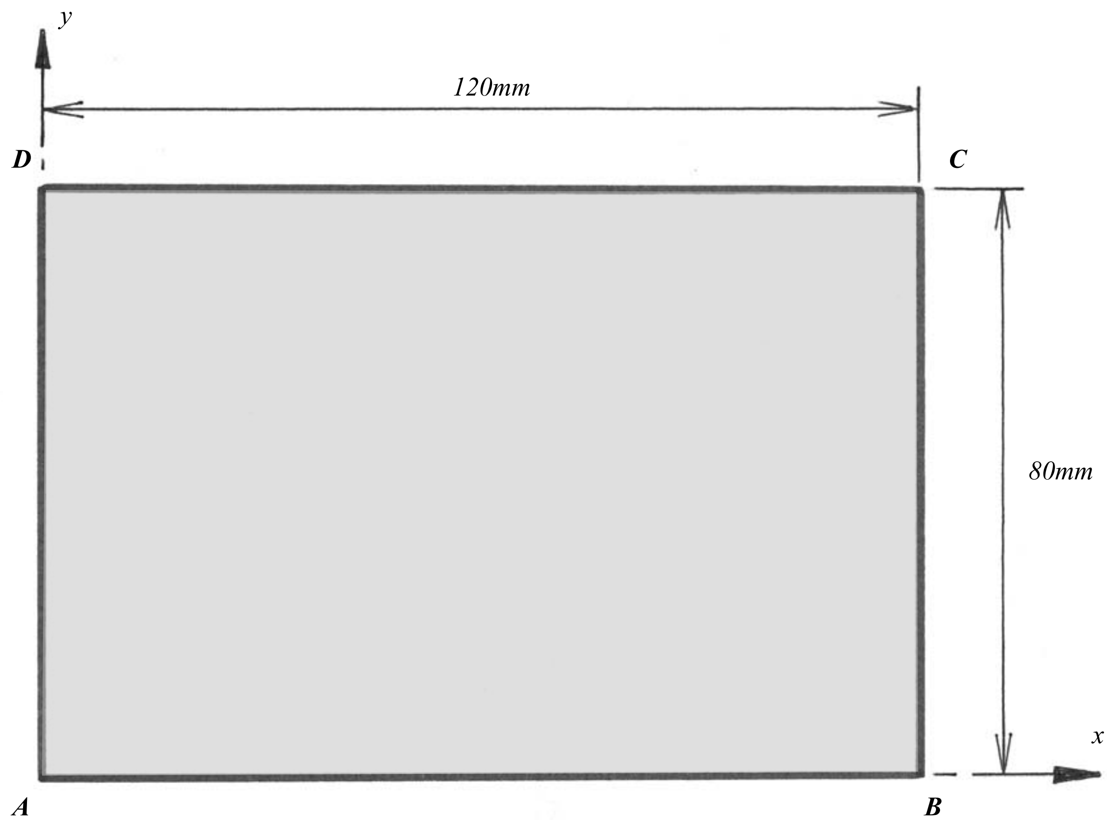

Fig. 8.a

SOLUCIÓN

1º) Si, para una orientación dada, la lectura de la galga es independiente de la posición, el estado de deformaciones también lo es, es decir, es homogéneo. Todas las componentes del tensor de deformaciones ***D*** son constantes, luego los desplazamientos serán como máximo funciones lineales de las coordenadas, pudiendo plantearse la siguiente solución de desplazamientos:

$$u = ax + by + c \quad ; \quad v = dx + ey + f \quad ; \quad w = 0$$

Sustituyendo los datos experimentales:

$$\begin{aligned}
u_A &= a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0 && ; \quad v_A = d \cdot 0 + e \cdot 0 + f = 0 \\
u_B &= a \cdot 120 + b \cdot 0 + c = 1{,}2 && ; \quad v_A = d \cdot 120 + e \cdot 0 + f = 0{,}4 \\
u_C &= a \cdot 120 + b \cdot 80 + c = 0{,}4 && ; \quad v_C = d \cdot 120 + e \cdot 80 + f = -0{,}4 \\
u_D &= a \cdot 0 + b \cdot 80 + c = -0{,}8 && ; \quad v_D = d \cdot 0 + e \cdot 80 + f = -0{,}8
\end{aligned}$$

De donde se despejan los coeficientes adimensionales:

$$a = 1/100 \quad ; \quad b = -1/100 \quad ; \quad c = 0 \quad ; \quad d = 1/300 \quad ; \quad e = -1/100 \quad ; \quad f = 0$$

Quedando el siguiente campo lineal de desplazamientos (coordenadas en *mm*):

$$u = \frac{x}{100} - \frac{y}{100} \qquad ; \qquad v = \frac{x}{300} - \frac{y}{100} \qquad ; \qquad w = 0$$

2º) El tensor gradiente del campo de desplazamientos es:

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{100} & \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{100} & \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{300} & \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{100} & \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{bmatrix}$$

3º) Componentes del tensor de deformación:

$$\in_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] = \frac{1}{100} + \frac{1}{18000}$$

$$\in_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] = -\frac{1}{100} + \frac{1}{10000}$$

$$\in_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]=0$$

$$\in_{xy}=\in_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)=-\frac{1}{300}-\frac{1}{15000}$$

$$\in_{yz}=\in_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

$$\in_{xz}=\in_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

En las componentes no nulas, el primer sumando corresponde a los términos lineales y el segundo a los cuadráticos. Para la componente $\in_{xx}$, el término lineal es *180* veces el cuadrático; para la $\in_{yy}$, el término lineal es *100* veces el cuadrático; y para la $\in_{xy}$, el término lineal es *50* veces el cuadrático. Considerando que una cantidad es infinitésima respecto a otra cuando es *50* o más veces inferior, podemos despreciar los términos cuadráticos y construir la matriz ***D*** sólo con los lineales, que también son infinitésimos respecto a la unidad:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{100} \quad ; \quad \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{1}{300}$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{100} \quad ; \quad \varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0$$

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad ; \quad \varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0$$

4º) El tensor de giro, considerando las deformaciones infinitesimales, es:

$$G=\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 \quad ; \quad \omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0 \quad ; \quad \omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{1}{150}$$

Y el vector giro:

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\nabla x\vec{u}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}\right]=\omega_z\vec{k}=\frac{1}{150}\vec{k}$$

5º) La deformación volumétrica unitaria es (siendo dV el diferencial de volumen):

$$\theta = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0$$

Luego el incremento de volumen es: $\Delta V = \iiint \theta \, dV = 0$

6º) En la Figura 8.b se representa sombreada la deformada de la placa habiendo aplicado a los desplazamientos un factor de ampliación de *200*:

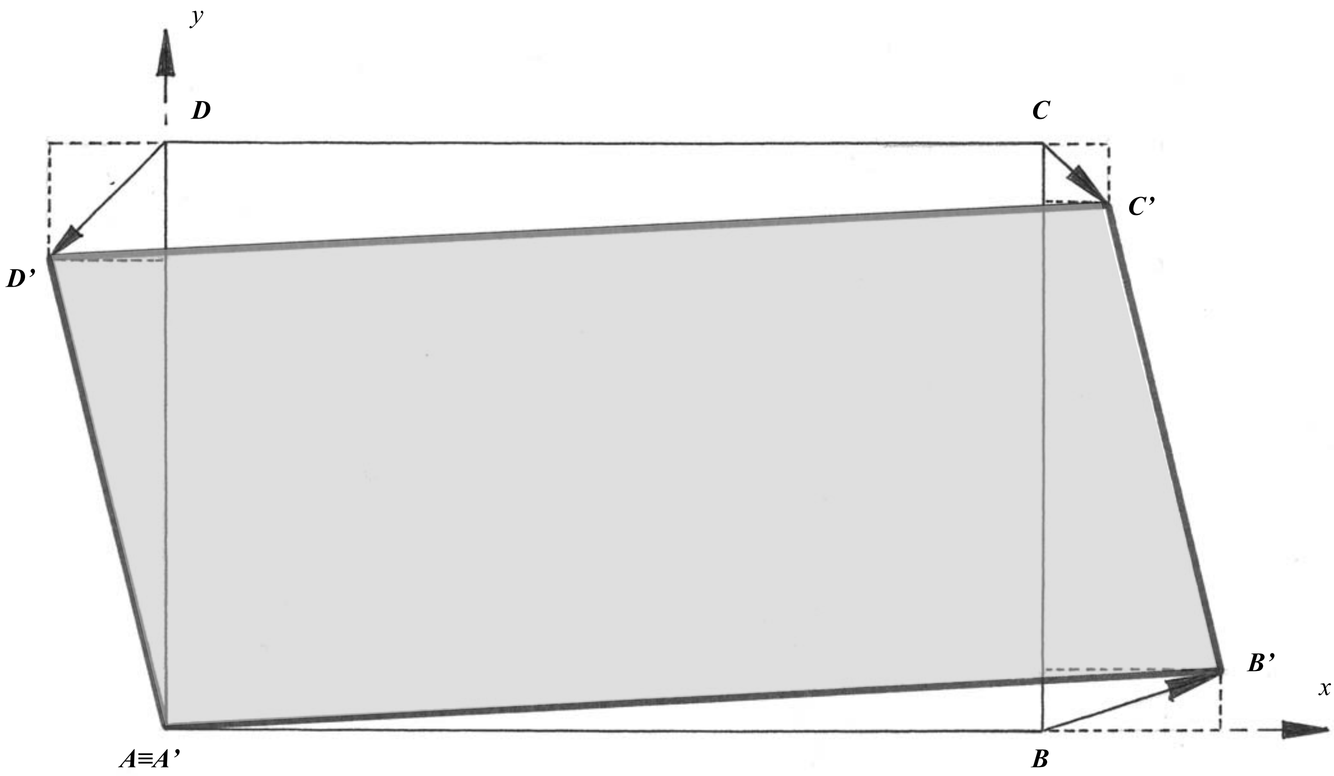

Fig. 8.b

7º) Para un entorno cuadrado de ***A*** de longitudes de los lados dx y dy, las longitudes finales serán:

$$dx' = (1 + \varepsilon_{xx})dx = (1 + 1/100)\,dx = 1{,}01 dx$$
$$dy' = (1 + \varepsilon_{yy})dy = (1 - 1/100)\,dx = 0{,}99\,dy$$

Los giros son:

$$\omega_z = \frac{1}{150} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{100} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{300} \quad ; \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = -\frac{1}{300}$$

Que, con la ampliación de $12{,}5\pi$, dan lugar a la representación de la Figura 8.c:

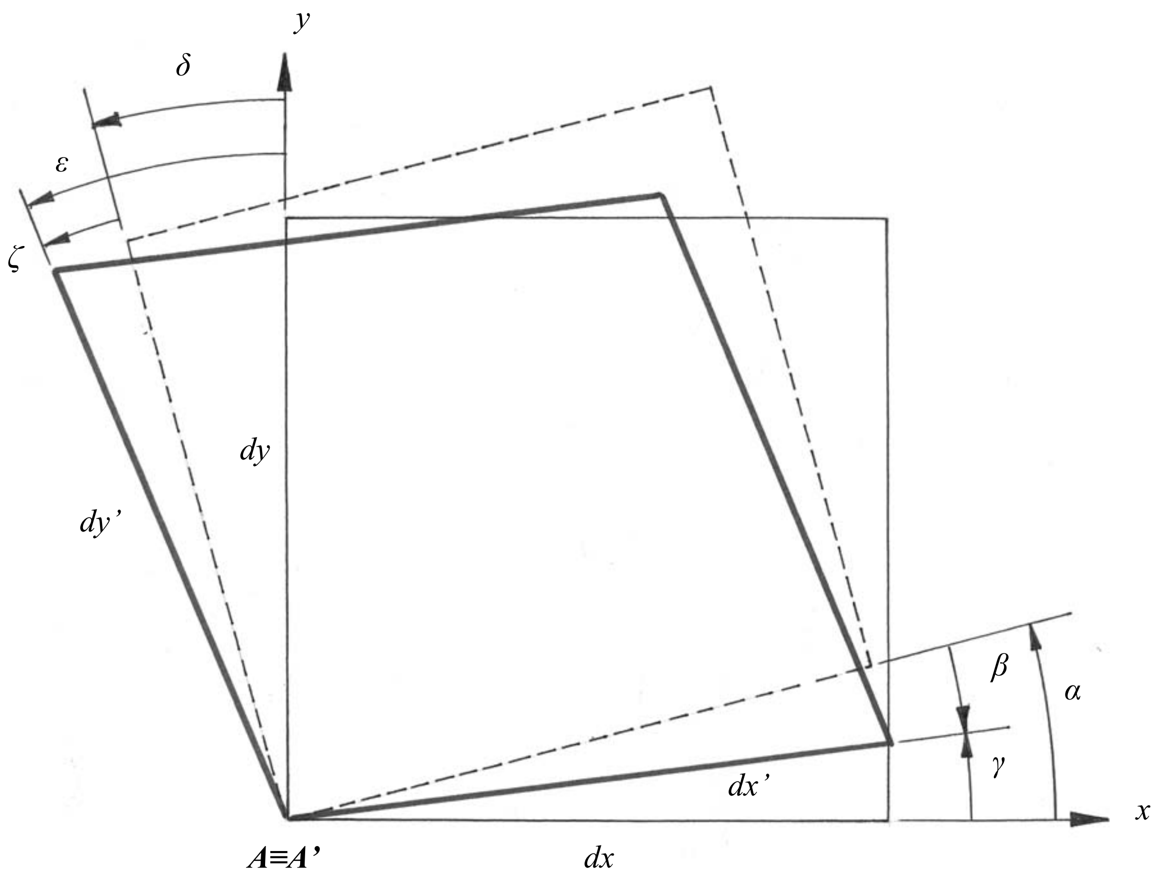

Fig. 8.c

$$\alpha = \delta = \omega_z \cdot 12{,}5\pi = \frac{1}{150} 12{,}5\pi = 15^0$$

$$\beta = \varepsilon_{xy} \cdot 12{,}5\pi = -\frac{1}{300} 12{,}5\pi = -7{,}5^0$$

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot 12{,}5\pi = \frac{1}{300} 12{,}5\pi = 7{,}5^0$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot 12{,}5\pi = -\frac{1}{100} 12{,}5\pi = -22{,}5^0$$

$$\zeta = \varepsilon_{yx} \cdot 12{,}5\pi = -\frac{1}{300} 12{,}5\pi = -7{,}5^0$$