PROBLEMA 9

TEMA: MODELO CINEMÁTICO. Campo cuadrático de desplazamientos. Linealidad geométrica. Variaciones de longitud y de volumen. Representación de la deformada

La placa de la Figura 9.a es de espesor *e=5mm* y experimenta el siguiente campo de desplazamientos:

$$u = k\left(2x^2 - y^2\right) \quad ; \quad v = kxy \quad ; \quad w = 0$$

Se pide:

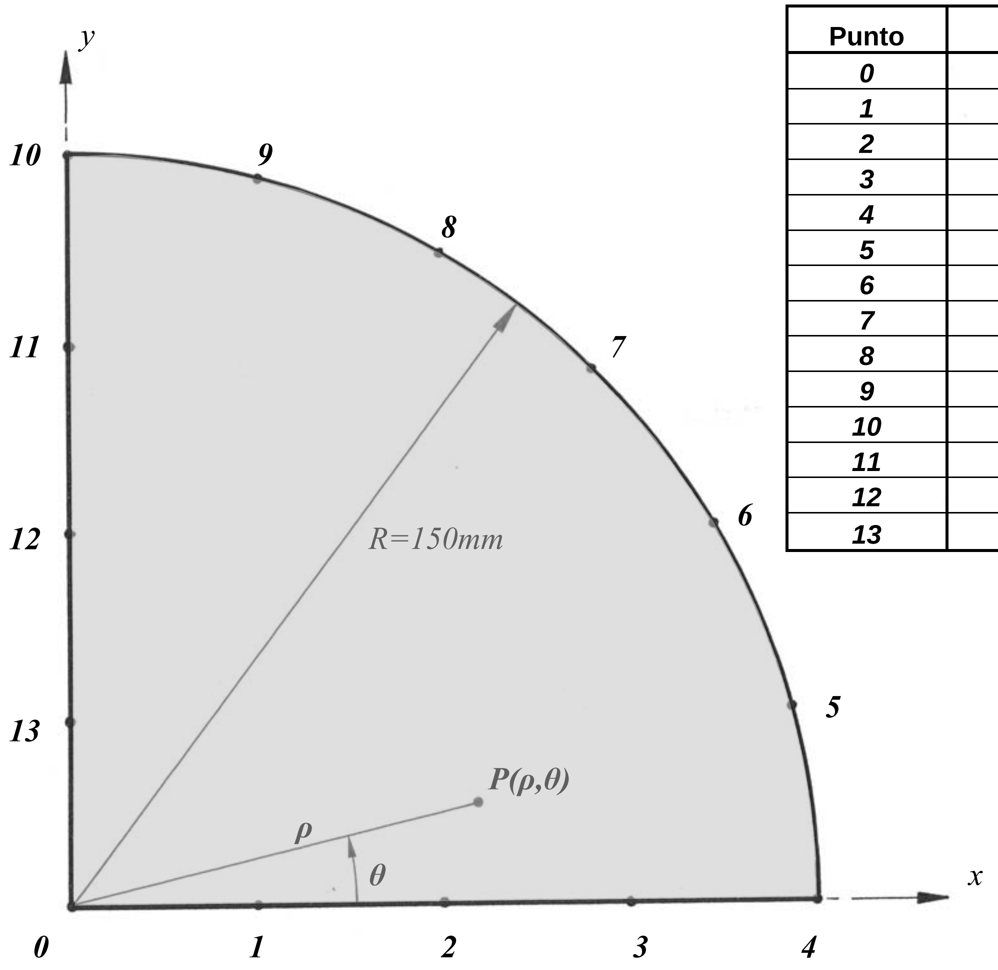
1º) Hallar el máximo valor que puede tener la constante k para asegurar que todas las deformaciones sean inferiores a la centésima

2º) Para el valor de k hallado, discutir si el problema puede considerarse un caso de linealidad geométrica

3º) Para el valor de k hallado, determinar en *%* la variación de longitud del perímetro de la placa

4º) Ídem para la variación de volumen de la placa

5º) Para el valor de k hallado, determinar las componentes del vector desplazamiento en todos los puntos numerados del borde de la placa y dibujar su deformada con un factor de ampliación de *50*.



Punto	ρ	θ
0	0	0
1	R/4	0
2	R/2	0
3	3R/4	0
4	R	0
5	R	π/12
6	R	π/6
7	R	π/4
8	R	π/3
9	R	5π/12
10	R	π/2
11	3R/4	π/2
12	R/2	π/2
13	R/4	π/2

Fig. 9.a

SOLUCIÓN

1º) Si las deformaciones van a ser inferiores a la centésima, pueden considerarse infinitesimales. Las correspondientes componentes del tensor de deformaciones infinitesimales ***D*** son:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 4kx \quad ; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}ky$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = kx \quad ; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0$$

El valor máximo de las componentes de ***D*** es el de la ε_{xx} para *x=R=150 mm*, es decir: $\varepsilon_{xx} = 4{\cdot}k{\cdot}150\ mm = 600{\cdot}k\ mm$. Luego, para que no supere la centésima, el máximo valor de la constante *k* es:

$$k = \frac{0{,}01}{600mm} = \frac{1}{60000mm}$$

2º) Para que haya linealidad geométrica, los desplazamientos en todo el sólido también deben de ser pequeños. Considerando el módulo del vector desplazamiento:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = k\sqrt{4x^4 + y^4 - 3x^2y^2}$$

Cuyo valor máximo se da para el vértice inferior derecho (*x=150mm , y=0*), siendo de *0,75mm*, que es *200* veces inferior al radio *R*. Por tanto, los desplazamientos son pequeños y, siéndolo también las deformaciones, el caso puede considerarse de linealidad geométrica.

3º) Para hallar el cambio de perímetro hay que determinar la variación de longitud de cada lado de la placa. Considerando los diferenciales de longitud indicados en la Figura 9.b, se obtiene:

.- Lado recto *OA*:

$y = 0 \quad ; \quad dl_{OA} = dx \quad ; \quad \varepsilon_{OA} = \varepsilon_{xx}$,

luego,

$$\Delta l_{OA} = \int_O^A \varepsilon_{xx}\, dl_{OA} = \int_0^R 4kx\, dx = 2kR^2$$

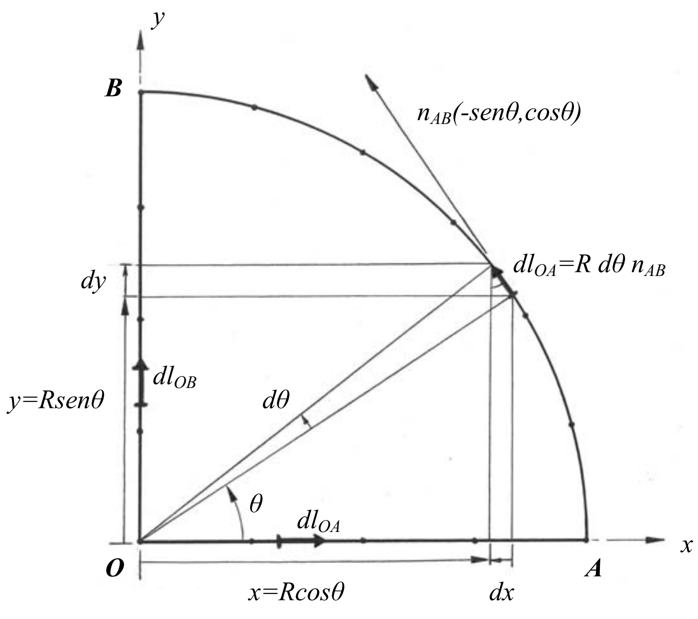


Fig. 9.b

.- Lado recto *OB*: $x = 0$; $dl_{OB} = dy$; $\varepsilon_{OB} = \varepsilon_{yy}$, luego,

$$\Delta l_{OB} = \int_O^B \varepsilon_{yy}\, dl_{OB} = \int_0^R 0\, dx = 0$$

.- Lado circular *AB*:

$$\varepsilon_{AB} = \vec{n}_{AB}^T D \vec{n}_{AB} = 4kxsen^2\theta + kx\cos^2\theta - ky(-sen\theta)\cos\theta = 4kR\cos\theta sen^2\theta + kR\cos^3\theta + kRsen^2\theta\cos\theta$$

Luego,

$$\Delta l_{AB} = \int_A^B \varepsilon_{AB}\, dl_{AB} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \left(4kR\cos\theta sen^2\theta + kR\cos^3\theta + kRsen^2\theta\cos\theta\right)Rd\theta =$$

$$= kR^2\left[\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \left(5\cos\theta sen^2\theta + \cos^3\theta\right)Rd\theta\right] = kR^2\left[\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} 5sen^2\theta\, dsen\theta + \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \left(1 - sen^2\theta\right)dsen\theta\right] = \frac{7}{3}kR^2$$

El perímetro inicial es: $P_o = R + R + \pi R/2$

Y el perímetro final: $P_f = P_o + \left(\Delta l_{OA} + \Delta l_{OB} + \Delta l_{AB}\right) = 2R + \frac{\pi R}{2} + \left(2kR^2 + 0 + \frac{7}{3}kR^2\right)$

Por tanto: $\Delta P\% = \dfrac{P_f - P_o}{P_o}100 = \dfrac{\frac{13}{3}kR^2}{2R + \frac{\pi R}{2}} = \dfrac{\frac{13}{3}\frac{1}{60000mm}150^2\, mm^2}{2{\cdot}150mm + \frac{\pi{\cdot}150mm}{2}}100 = 0{,}3\%$

4º) La deformación volumétrica unitaria es: $\theta = \dfrac{d\Delta V}{dV} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 5kx$, luego,

$\Delta V = \iiint 5kx\, dxdydz = 5k\int_{\rho=0}^{\rho=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}\int_{z=0}^{z=e} \rho\cos\theta\, d\rho\, d\theta\, dz = \dfrac{5k}{3}R^3 e$, y:

$$\Delta V\% = \frac{\Delta V}{V_o}100 = \frac{\frac{5}{3}keR^3}{\frac{\pi R^2 e}{4}}100 = \frac{20kR}{3\pi}100 = \frac{20{\cdot}150mm}{3\pi 60000mm}100 = 0{,}53\%$$

5º) En la tabla siguiente se tienen las componentes de los desplazamientos de los puntos señalados. A continuación se ha trazado la deformada de la placa con la ampliación indicada.

Punto	x (mm)	y (mm)	$u=k(2x^2-y^2)$ (mm)	$v=kxy$ (mm)
0	0	0	0	0
1	R/4=37,5	0	0,0469	0
2	R/2=75	0	0,1875	0
3	3R/4=112,5	0	0,422	0
4	R=150	0	0,75	0
5	Rcos15=144,9	Rsen15=38,8	0,6746	0,0937
6	Rcos30=129,9	Rsen30=75	0,4687	0,1624
7	Rcos45=106,1	Rsen45=106,1	0,1875	0,1875
8	Rcos60=75	Rsen60=129,9	-0,0937	0,1624
9	Rcos75=38,8	Rsen75=144,9	-0,2996	0,0937
10	0	R=150	-0,375	0
11	0	3R/4=112,5	-0,211	0
12	0	R/2=75	-0,0937	0
13	0	R/4=37,5	-0,0234	0

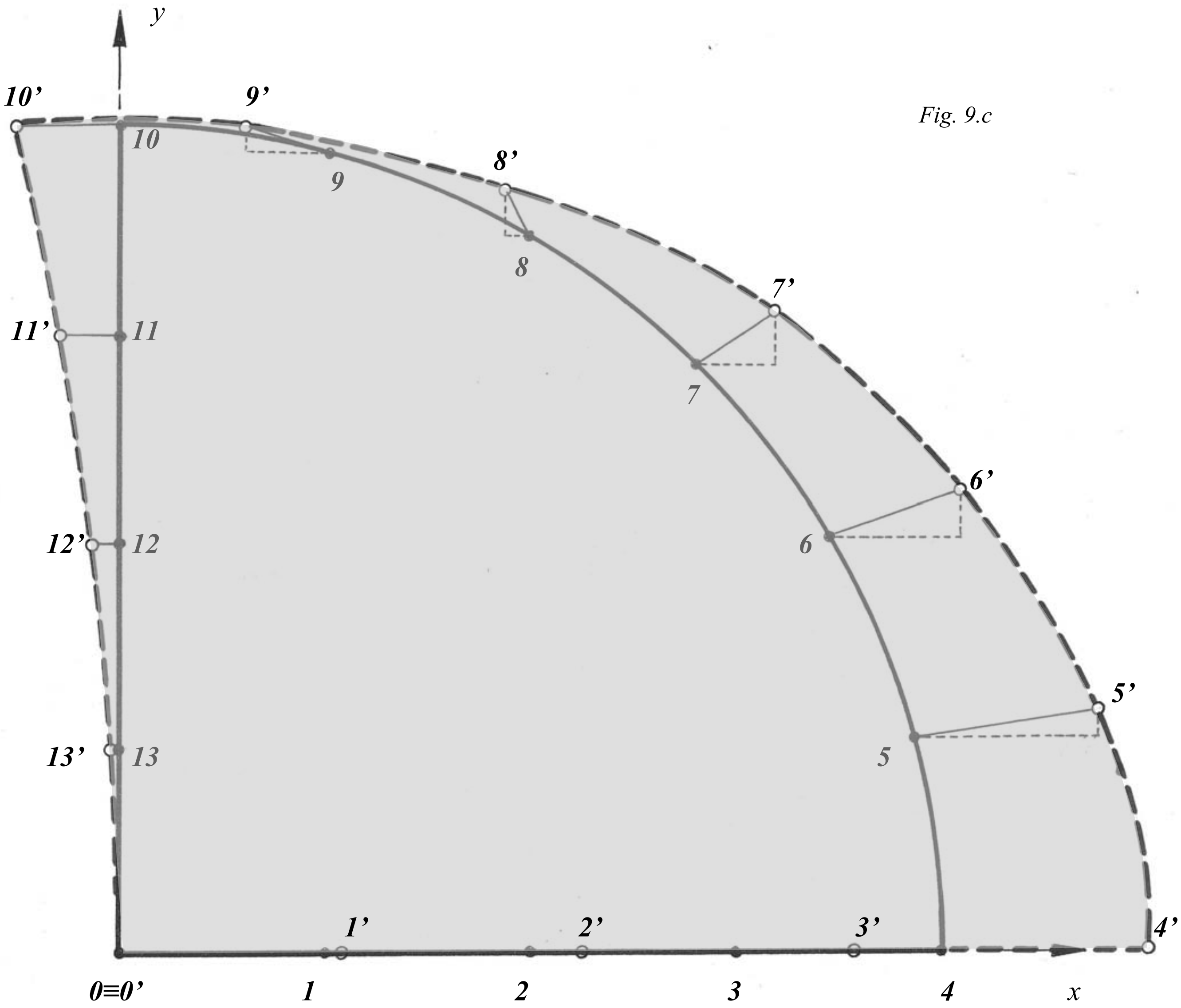


Fig. 9.c