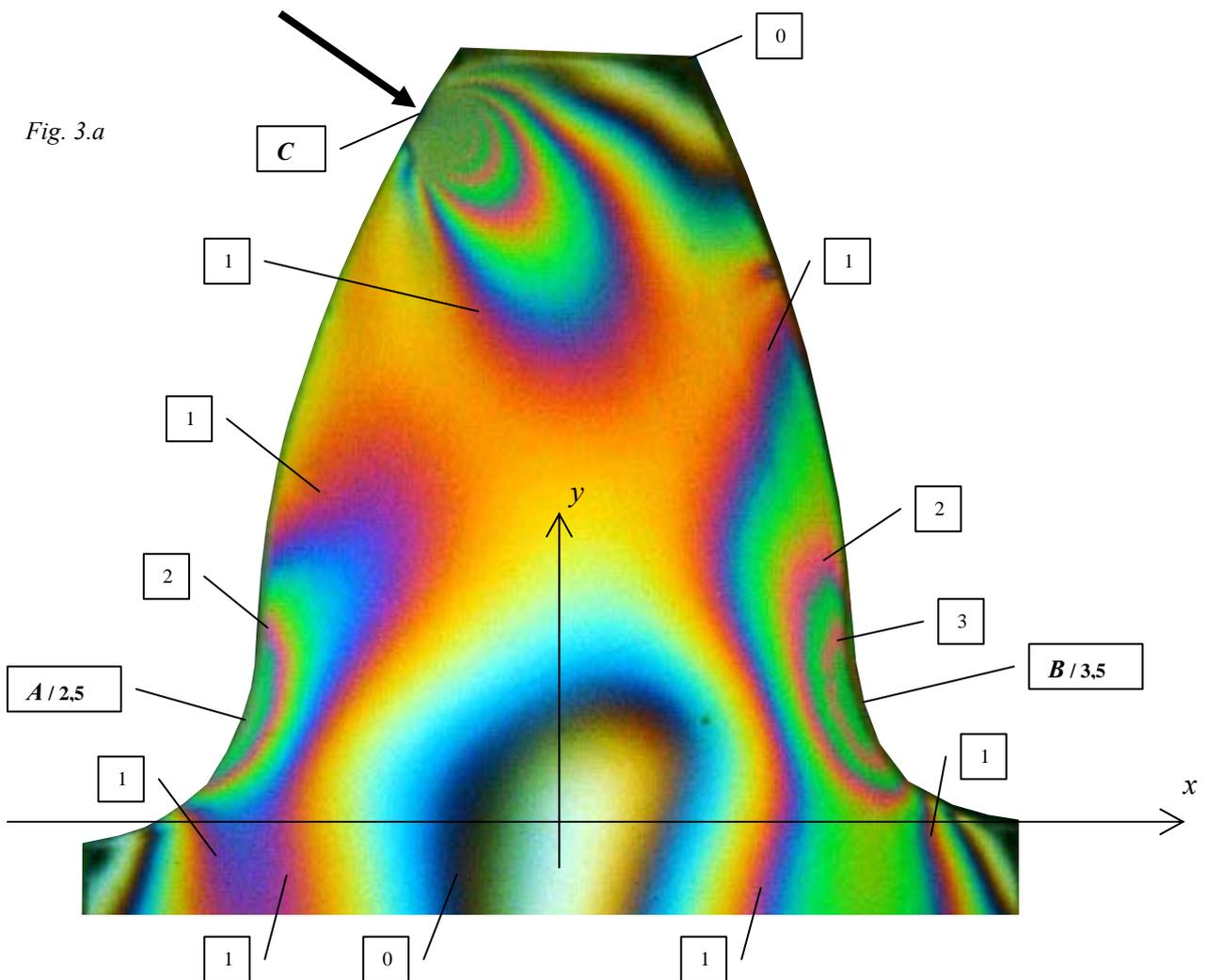


PROBLEMA 3

TEMA: MODELO DE EQUILIBRIO. Direcciones y tensiones principales a partir de resultados fotoelásticos

La imagen de la Figura 3.a es el resultado de un ensayo de fotoelasticidad plana sobre un modelo de diente de engranaje. El modelo está empotrado por la base (fuera de la imagen) y se ha simulado el ataque de otro diente que engrana con él mediante una carga perpendicular al borde en el punto C (representada con una flecha en la imagen). En la figura se han indicado los órdenes de franja de algunas isocromáticas. Sabiendo que el modelo es de espesor $e=5mm$ y que está constituido por resina epoxi de factor de franja $f=10kN/m$, se pide:

- 1º) Direcciones principales en todo punto del contorno
- 2º) Tensiones principales y matriz de tensiones para la referencia xyz en los puntos A y B del contorno
- 3º) Diagrama de Mohr para los puntos A y B, indicando los puntos representativos de los planos coordenados, así como los ángulos que dichas orientaciones forman con las direcciones principales



SOLUCIÓN

1º) No hay tensión para las orientados de vector característico normal al plano del problema, por ser éste de tensión plana. Luego, en todo punto la dirección paralela al eje z es principal.

Todos los puntos del contorno, salvo el C están libres de fuerzas exteriores. Luego, en el plano del problema y para la orientación de vector normal al contorno, también es nulo el vector tensión. En el punto C la fuerza exterior es perpendicular al borde, por tanto, la correspondiente fuerza de superficie (que es la fuerza exterior dividida por el área en la que actúa) no tiene componente tangencial al borde.

Por tanto, en el plano del problema y para todos los puntos del borde, las direcciones normal y tangencial al mismo son principales (el borde es una isostática).

2º) En fotoelasticidad plana se verifica que, en los puntos pertenecientes a una franja de un mismo color, o isocromática, la diferencia entre las tensiones principales en el plano

es constante: $\sigma_I - \sigma_{II} = \frac{nf}{e}$, siendo:

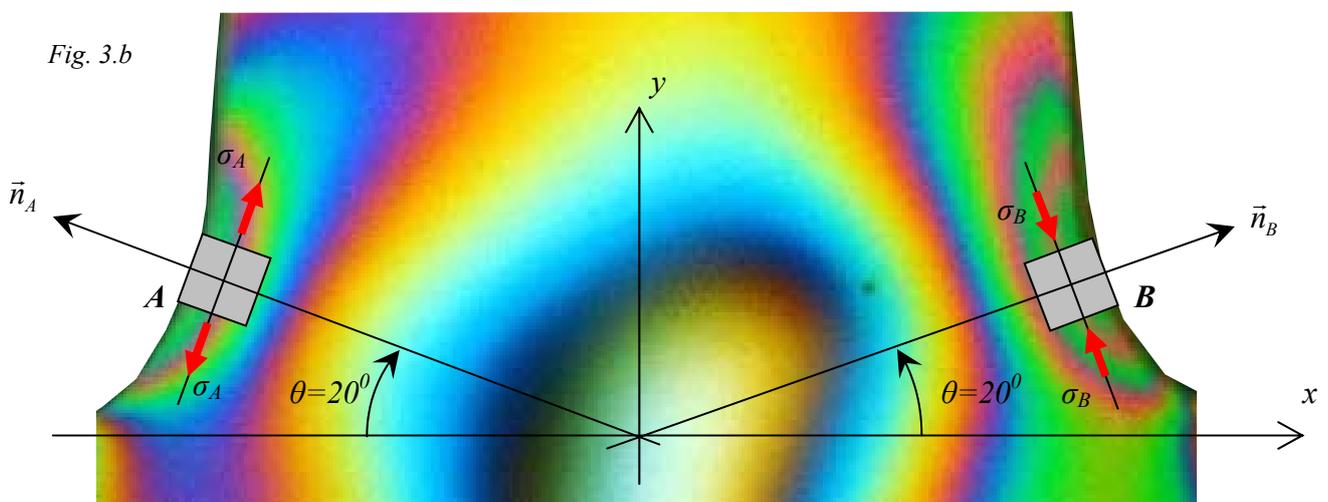
$\sigma_I - \sigma_{II}$, primera y segunda direcciones principales en el plano

n , orden de franja de la isocromática

f , factor de franja del material constituyente del modelo

e , espesor del modelo

Considerando en A y en B los elementos de volumen orientados según la normal y la tangente al contorno, por lo comentado en el primer apartado sólo habrá tensión en las caras perpendiculares al plano y al contorno. Por el teorema de reciprocidad, esta tensión sólo tiene componente normal, y, por la orientación y sentido de la fuerza exterior, la tensión debe ser de tracción en A y de compresión en B . En la Figura 3.b se tiene la representación del estado tensional en ambos puntos; se ha indicado el ángulo que forma con el eje x la normal al contorno en esos puntos.



Para el punto **A** las tensiones principales en el plano son: $\sigma_I = \sigma_A$, $\sigma_{II} = 0$, luego:

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_A = \frac{n_A f}{e} = \frac{2,5 \cdot 10 \text{ kN/m}}{5 \text{ mm}} = 5 \text{ N/mm}^2 = 5 \text{ MPa}$$

y las tensiones principales son: $\sigma_1 = \sigma_A = 5 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

Para el punto **B** las tensiones principales en el plano son: $\sigma_I = 0$, $\sigma_{II} = \sigma_B$, luego:

$$\sigma_I - \sigma_{II} = -\sigma_B = \frac{n_B f}{e} = \frac{3,5 \cdot 10 \text{ kN/m}}{5 \text{ mm}} = 7 \text{ N/mm}^2 = 7 \text{ MPa}$$

y las tensiones principales son: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_B = -7 \text{ MPa}$

Para hallar la matriz de tensiones del punto **A** para la referencia xyz , partimos de la matriz de tensiones en la referencia de las direcciones principales, $\begin{bmatrix} \sigma_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y

efectuamos el correspondiente cambio de sistema de ejes. De los cuatro posibles triedros de ejes principales escogemos el señalado en la Figura 3.c, al cual corresponden los vectores unitarios indicados a la izquierda de la figura.

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 & (n_{1x} = \sin \theta , n_{1y} = \cos \theta , n_{1z} = 0) \\ \vec{n}_2 & (n_{2x} = -\cos \theta , n_{2y} = \sin \theta , n_{2z} = 0) \\ \vec{n}_3 & (n_{3x} = 0 , n_{3y} = 0 , n_{3z} = 1) \end{aligned}$$

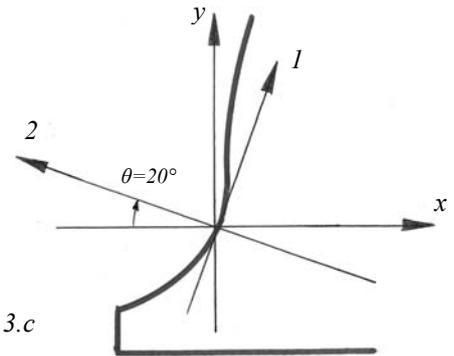


Fig. 3.c

Estos vectores constituyen la matriz de cambio N del sistema xyz al 123 , y la matriz de tensiones para el sistema xyz se obtiene mediante: $T_{xyz} = N^T T_{123} N$, o, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_A \sin^2 \theta & \sigma_A \sin \theta \cos \theta & 0 \\ \sigma_A \sin \theta \cos \theta & \sigma_A \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y los valores numéricos de las componentes no nulas de la matriz son (a la derecha se representa el estado tensional en un elemento orientado según la referencia xyz):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} & = \sigma_A \sin^2 \theta = 5 \text{ MPa} \cdot \sin^2 20 = 0,585 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} & = \sigma_A \sin \theta \cos \theta = 5 \text{ MPa} \cdot \sin 20 \cdot \cos 20 = 1,607 \text{ MPa} \\ \sigma_{yy} & = \sigma_A \cos^2 \theta = 5 \text{ MPa} \cdot \cos^2 20 = 4,415 \text{ MPa} \end{aligned}$$

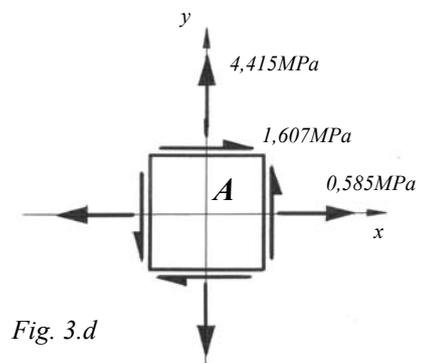


Fig. 3.d

Para hallar la matriz de tensiones del punto **B** para la referencia xyz , partimos

de la matriz de tensiones en la referencia de las direcciones principales $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_B \end{bmatrix}$ y

efectuamos el correspondiente cambio de sistema de ejes. De los cuatro posibles triedros de ejes principales escogemos el señalado en la Figura 3.e al cual corresponden los vectores unitarios indicados a la izquierda de la figura.

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 & (n_{1x} = 0, n_{1y} = 0, n_{1z} = 1) \\ \vec{n}_2 & (n_{2x} = \cos \theta, n_{2y} = \sin \theta, n_{2z} = 0) \\ \vec{n}_3 & (n_{3x} = -\sin \theta, n_{3y} = \cos \theta, n_{3z} = 0) \end{aligned}$$

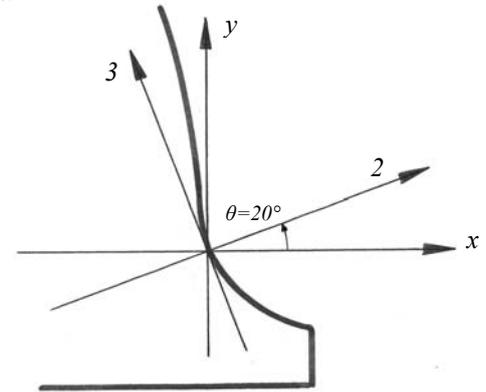


Fig. 3.e

Estos vectores constituyen la matriz de cambio N del sistema xyz al 123 , y la matriz de tensiones para el sistema xyz se obtiene mediante: $T_{xyz} = N^T T_{123} N$, o, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_B \sin^2 \theta & -\sigma_B \sin \theta \cos \theta & 0 \\ -\sigma_B \sin \theta \cos \theta & \sigma_B \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y los valores numéricos de las componentes no nulas de la matriz son (a la derecha se representa el estado tensional en un elemento orientado según la referencia xyz):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} & = \sigma_B \sin^2 \theta = -7 \text{MPa} \cdot \sin^2 20 = -0,819 \text{MPa} \\ \tau_{xy} & = -\sigma_B \sin \theta \cos \theta = 7 \text{MPa} \cdot \sin 20 \cdot \cos 20 = 2,250 \text{MPa} \\ \sigma_{yy} & = \sigma_B \cos^2 \theta = -7 \text{MPa} \cdot \cos^2 20 = -6,181 \text{MPa} \end{aligned}$$

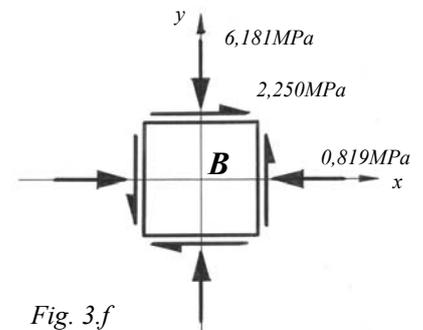
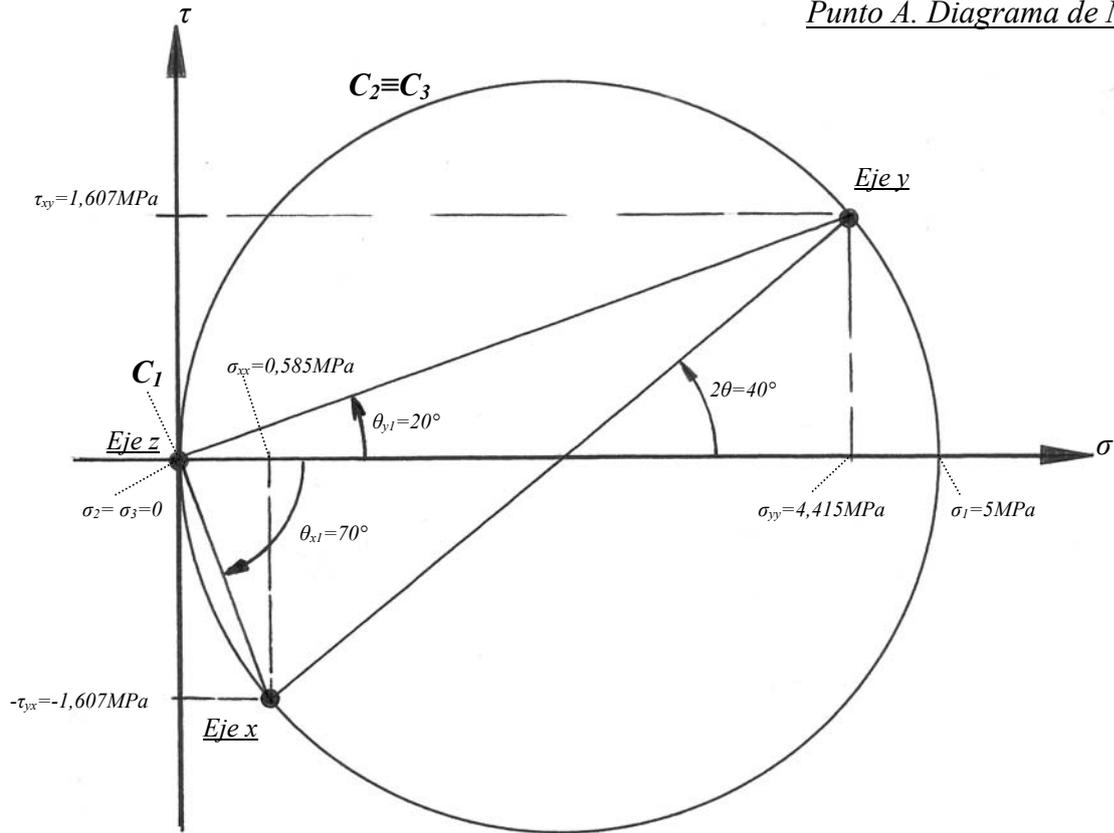


Fig. 3.f

3º) En la Figura 3.g se representan los diagramas de Mohr correspondientes a los puntos **A** y **B**. Los puntos correspondientes a las orientaciones según los ejes coordenados se han señalado con un círculo negro. Nótese que, al haber una sola tensión principal no nula (estado uniaxial), sólo están definidos los ángulos de los ejes coordenados con esa dirección principal (θ_{x1} , θ_{y1} y $\theta_{z1}=90^\circ$ para el punto **A**, y θ_{x3} , θ_{y3} y $\theta_{z3}=90^\circ$ para el punto **B**).

Punto A. Diagrama de Mohr



Punto B. Diagrama de Mohr

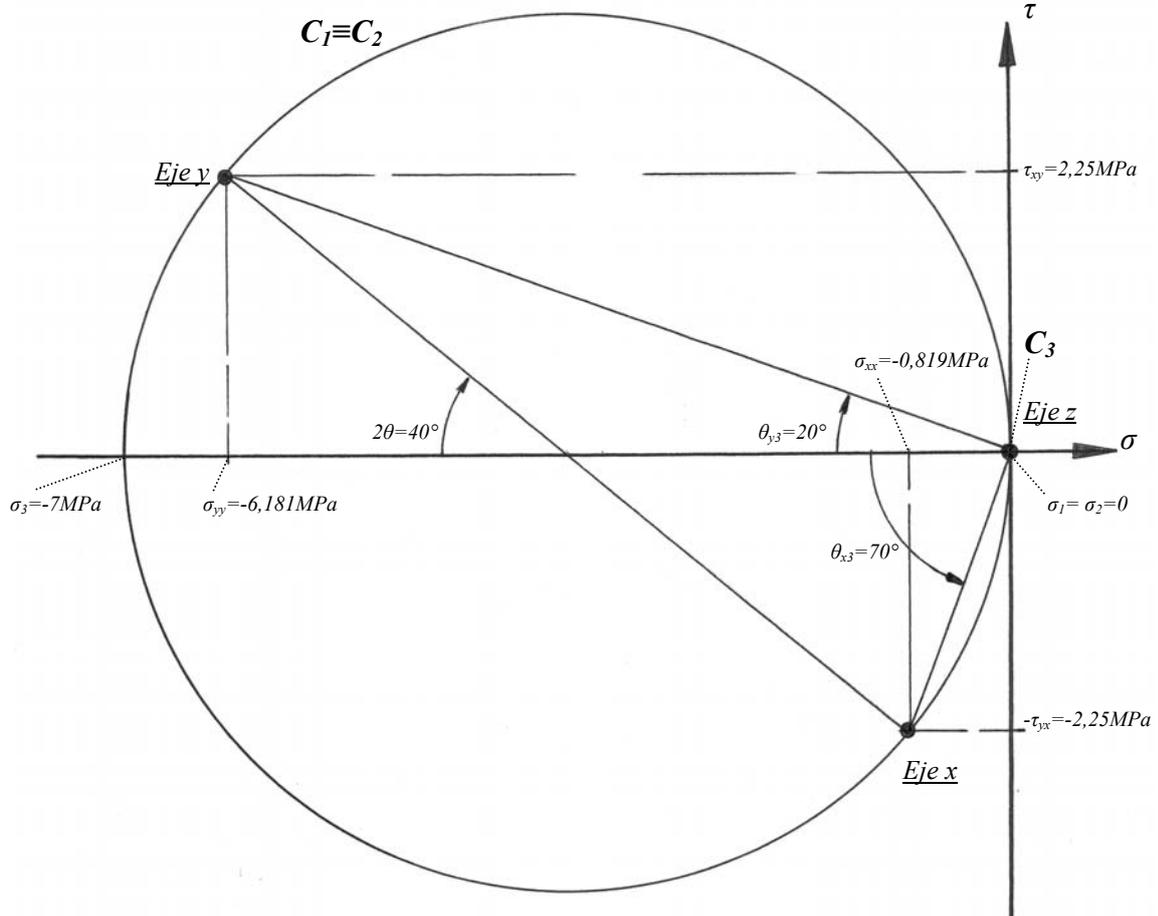


Fig. 3.g