

## PROBLEMA 14

**TEMA:** LEYES DE COMPORTAMIENTO. ELASTICIDAD. Matrices de rigidez y flexibilidad en aluminio (material isótropo) y plásticos reforzados con fibras continuas (materiales transversalmente isótropos y ortótropos)

Se consideran los siguientes materiales:

- A) Aluminio puro (  $E = 70.000 \text{ MPa}$  ;  $\nu = 0,3$  )
- B) Laminado de poliéster y fibra de vidrio fabricado partiendo de láminas de fibras paralelas y pegándolas con la misma orientación (en la Figura 14.a se tiene una micrografía de una sección según un plano perpendicular a la dirección de las fibras (dirección 1) )
- C) Laminado de poliéster y fibra de vidrio fabricado partiendo de láminas de tejido bidireccional y pegándolas con la misma orientación (en la Figura 14.b.1 se tiene una micrografía del plano de las fibras (perpendicular a la dirección 3) y en la 14.b.2 una micrografía de una sección según un plano perpendicular a la dirección de uno de los dos grupos de fibras)

En la bibliografía se encuentran las siguientes constantes ingenieriles para los materiales B y C (los subíndices se refieren a las direcciones principales de rigidez)

		MATERIAL B	MATERIAL C
Módulos de elasticidad longitudinal o de Young	$E_1 \text{ (MPa)}$	57.000	35.900
	$E_2 \text{ (MPa)}$	14.000	29.300
	$E_3 \text{ (MPa)}$	14.000	18.300
Módulos de elasticidad transversal. $G_{ij} = G_{ji}$	$G_{12} \text{ (MPa)}$	5.700	7.600
	$G_{23} \text{ (MPa)}$	5.000	6.300
	$G_{31} \text{ (MPa)}$	5.700	6.600
Coeficientes de Poisson. $\nu_{ij} \equiv$ relación entre la contracción producida en la dirección $i$ cuando se tiene un alargamiento según $j$ . $S_{ij} = -\nu_{ij} / E_i$	$\nu_{12}$	0,277	0,177
	$\nu_{23}$	0,400	0,371
	$\nu_{31}$	0,068	0,157

Ref.: *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. S.G. Lekhnitskii. MIR Publishers 1981

Para cada material se pide:

- 1º) Tipo de simetría elástica que presentan
- 2º) Matriz de flexibilidad  $S$
- 3º) Matriz de rigidez  $C$
- 4º) Se considera un cubo de 75cm de arista de cada material. En el de Material B las fibras son paralelas a una arista (dirección 1), y en el de Material C las direcciones de las fibras del tejido bidireccional también son paralelas a las aristas (direcciones 1 y 2). Si sobre cada cubo se transmite una tensión de tracción de 70MPa según la dirección 1, hallar y representar para cada material la deformada del cubo (alzado, planta y vista lateral a escala 1:10 con un factor de ampliación de 100 para las deformaciones; para mayor claridad, suponga que uno de los vértices del cubo se mantiene inmóvil).

Fig. 14.a

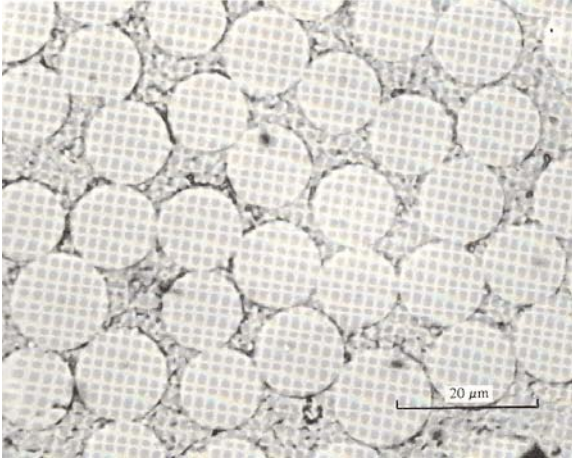


Fig. 14.b.1

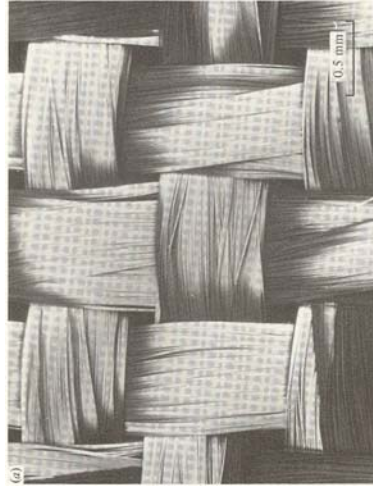
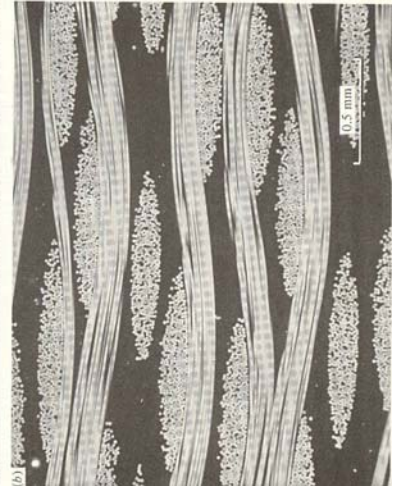


Fig. 14.b.2



Ref.: *Materiales Compuestos*. Págs. 65-66. Derek Hull. Ed. Reverté. 1987

### SOLUCIÓN

1º) Material A: dado que sólo presenta 2 constantes elásticas independientes, se trata de un material ISÓTROPO.

Material B: según los valores de la Tabla, el material presenta una dirección de máxima rigidez (la paralela a las fibras). Por la igualdad de los módulos de Young en las direcciones 2 y 3, y por la igualdad de los coeficientes de Lamé en los planos 12 y 31 ( $G_{12}=G_{31}$ ), las direcciones 2 y 3 son elásticamente equivalentes. Luego el material es TRANSVERSALMENTE ISÓTROPO, con el eje 1, paralelo a las fibras, como eje de simetría rotacional.

Material C: por la configuración y los valores de la Tabla, el material presenta tres planos de simetría elástica. Hay dos direcciones de máxima rigidez coincidentes con las direcciones de las fibras, 1 y 2. Esas direcciones son ortogonales y su rigidez es distinta. La dirección perpendicular al plano 12 es de rigidez mínima, ya que depende enteramente del componente aglomerante (la resina de poliéster). El material es ORTÓTROPO.

2º) La matriz de flexibilidad en función de las constantes ingenieriles es:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo para el aluminio:

$$E_1 = E_2 = E_3 = 70000 \text{ MPa} \quad , \quad \nu_{ij} = 0,3 \quad y \quad G_{ij} = G = E / 2(1 + \nu) \quad , \text{ queda:}$$

$$S_A = \begin{pmatrix} 14,29 & -4,29 & -4,29 & 0 & 0 & 0 \\ -4,29 & 14,29 & -4,29 & 0 & 0 & 0 \\ -4,29 & -4,29 & 14,29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 37,14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 37,14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37,14 \end{pmatrix} 10^{-6} / \text{MPa}$$

Y sustituyendo para los otros dos materiales:

$$S_B = \begin{pmatrix} 17,54 & -4,86 & -4,86 & 0 & 0 & 0 \\ -4,86 & 71,53 & -28,57 & 0 & 0 & 0 \\ -4,86 & -28,57 & 71,53 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 175,44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 175,44 \end{pmatrix} 10^{-6} / \text{MPa}$$

$$S_C = \begin{pmatrix} 27,86 & -4,93 & -8,58 & 0 & 0 & 0 \\ -4,93 & 34,13 & -12,66 & 0 & 0 & 0 \\ -8,58 & -12,66 & 54,64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 158,73 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 151,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 131,58 \end{pmatrix} 10^{-6} / \text{MPa}$$

3º) Hallando las inversas de las matrices anteriores se obtiene:

$$C_A = S_A^{-1} = \begin{pmatrix} 94231 & 40385 & 40385 & 0 & 0 & 0 \\ 40385 & 94231 & 40385 & 0 & 0 & 0 \\ 40385 & 40385 & 94231 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 26923 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 26923 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26923 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

$$C_B = S_B^{-1} = \begin{pmatrix} 60819 & 6895 & 6895 & 0 & 0 & 0 \\ 6895 & 17448 & 7448 & 0 & 0 & 0 \\ 6895 & 7448 & 17448 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5700 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

$$C_C = S_C^{-1} = \begin{pmatrix} 40042 & 8880 & 8344 & 0 & 0 & 0 \\ 8880 & 34025 & 9278 & 0 & 0 & 0 \\ 8344 & 9278 & 21760 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7600 \end{pmatrix} MPa$$

4º) Para una tracción uniaxial según 1 se tiene:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 = 70MPa \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = 0 \\ \sigma_4 = 0 \\ \sigma_5 = 0 \\ \sigma_6 = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}\sigma_1 \\ S_{21}\sigma_1 \\ S_{31}\sigma_1 \\ S_{41}\sigma_1 \\ S_{51}\sigma_1 \\ S_{61}\sigma_1 \end{pmatrix}$$

Las deformaciones en función de las constantes ingenieriles quedan para los tres materiales:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\Delta l_1}{l_1} \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{-\nu_{21}}{E_2} \sigma_1 = \frac{\Delta l_2}{l_2} \quad ; \quad \varepsilon_3 = \frac{-\nu_{31}}{E_3} \sigma_1 = \frac{\Delta l_3}{l_3} \quad ; \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0$$

Teniendo en cuenta que  $\sigma_1 = 70MPa$  y  $l_1 = l_2 = l_3 = 75cm$ , y sustituyendo las constantes ingenieriles de cada material, se obtiene:

Material A:  $\Delta l_1 = 0,75mm$  ;  $\Delta l_2 = -0,225mm$  ;  $\Delta l_3 = -0,225mm$

Material B:  $\Delta l_1 = 0,921mm$  ;  $\Delta l_2 = -0,255mm$  ;  $\Delta l_3 = -0,255mm$

Material C:  $\Delta l_1 = 1,462mm$  ;  $\Delta l_2 = -0,259mm$  ;  $\Delta l_3 = -0,45mm$

Lo que da lugar a las representaciones de las figuras siguientes

Fig. 14.d.- Línea de trazos: situación inicial  
 Deformada del Material A: azul  
 Deformada del Material B: línea roja  
 Deformada del Material C: línea amarilla

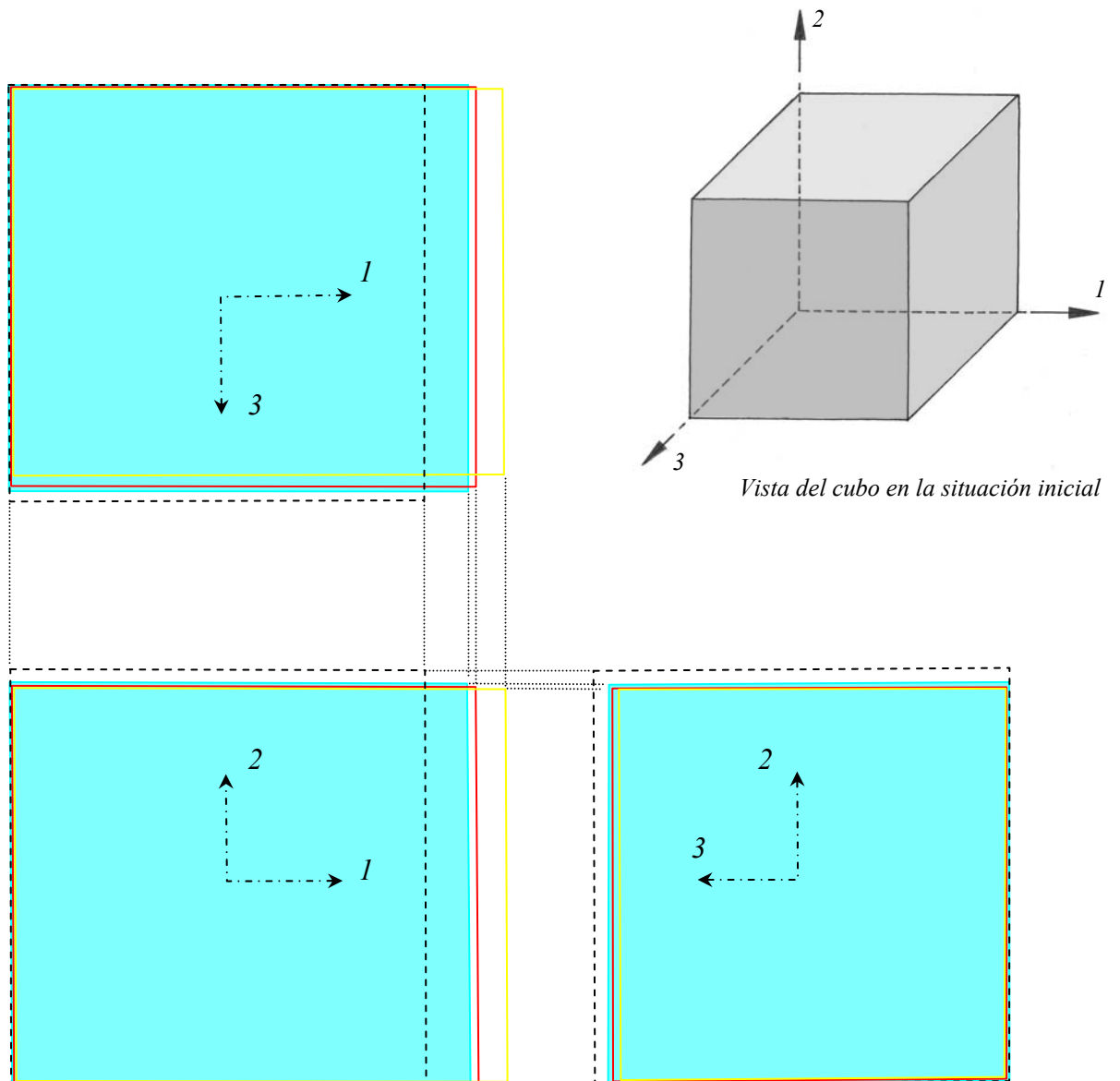
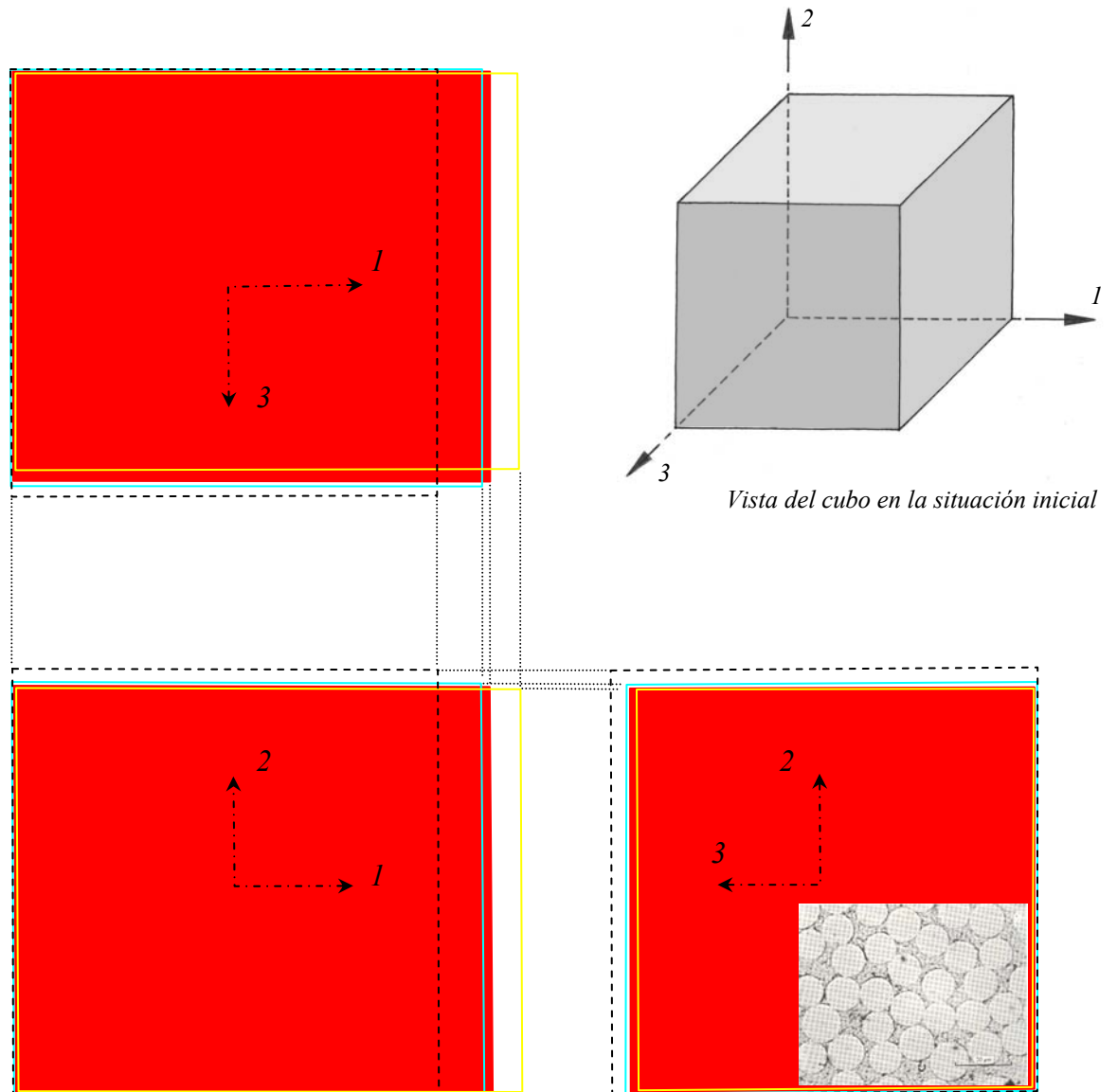
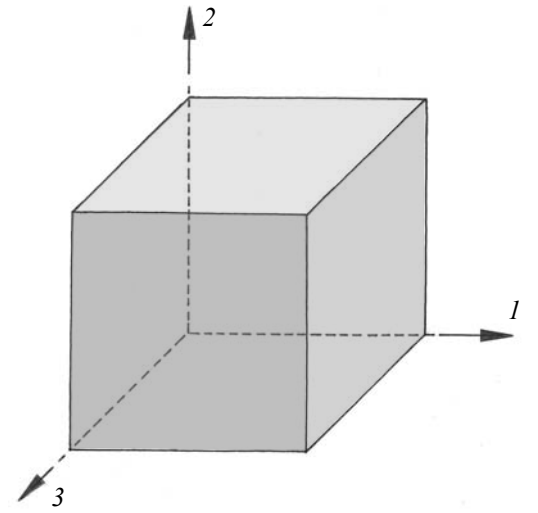


Fig. 14.e.- Línea de trazos: situación inicial  
 Deformada del Material A: línea azul  
 Deformada del Material B: rojo  
 Deformada del Material C: línea amarilla



The diagram illustrates the initial state of a cube and its projections. The top right shows a 3D cube with axes labeled 1, 2, and 3. The top left shows a 2D projection of the cube's front face with axes 1 and 3, and an inset image of a woven fabric. The bottom left shows a 2D projection of the cube's top face with axes 1 and 2. The bottom right shows a 2D projection of the cube's right side face with axes 2 and 3, and an inset image of a woven fabric.

Vista del cubo en la situación inicial



*Vista del cubo en la situación inicial*