PROBLEMA 15

TEMA: LEYES DE COMPORTAMIENTO. ELASTICIDAD. Sólido elástico anisótropo. Matriz de flexibilidad y cambio de sistema de referencia. Ensayos de tracción simple

Un sólido elástico está formado por un monocristal de aluminio que tiene simetría cúbica. Las componentes no nulas de la matriz de flexibilidad respecto a los ejes cristalográficos del material son:

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = 1{,}59 \cdot 10^{-11}\ m^2 / N$$
$$S_{12} = S_{13} = S_{23} = -0{,}58 \cdot 10^{-11}\ m^2 / N$$
$$S_{44} = S_{55} = S_{66} = 3{,}52 \cdot 10^{-11}\ m^2 / N$$

Se pide:

1º) Demostrar que el material no es isótropo
2º) Hallar la matriz de flexibilidad para la referencia resultante de girar el sistema original alrededor de la primera dirección un ángulo de *30º* en sentido positivo (en la Figura 15.a se representa la transformación)
3º) Considerando el cubo elemental de la Figura 15.a orientado según la nueva referencia, hallar las deformaciones provocadas por una tensión simple de *10MPa* según la primera dirección de la nueva referencia. Representar la deformada del cubo manteniendo fijo el origen y permitiendo el giro de una sola de las aristas coincidentes con los ejes de referencia; aplicar un factor de ampliación *k=5.000* para las deformaciones.
4º) Idem para una tensión simple de *10MPa* según la segunda dirección de la nueva referencia
5ª) Idem para una tensión simple de *10MPa* según la tercera dirección de la nueva referencia

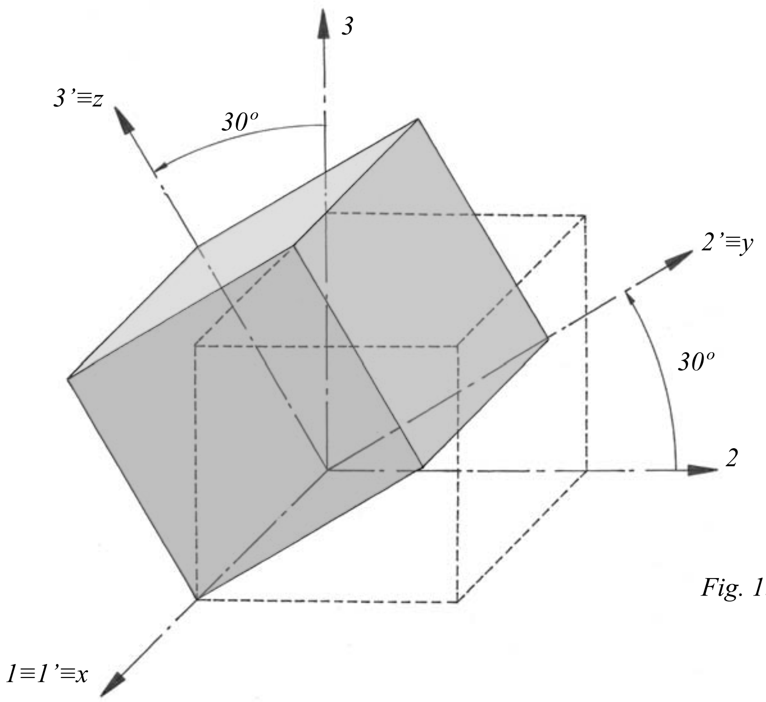

Fig. 15.a

SOLUCIÓN

1º) Si el material fuese isótropo, la matriz de flexibilidad debería permanecer inalterada frente a cualquier cambio de sistema de referencia. En lugar de efectuar un cambio de ejes resulta más sencillo comprobar si la matriz de flexibilidad del material:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}59 & -0{,}58 & -0{,}58 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}58 & 1{,}59 & -0{,}58 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}58 & -0{,}58 & 1{,}59 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}52 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}52 \end{pmatrix} \cdot 10^{-11}\ m^2/N$$

es homologable a la de un material elástico isótropo genérico, que, expresada en función de las constantes elásticas ingenieriles, es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix}$$

debiendo cumplirse que: $\frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}$

Igualando términos se obtiene:

$$\frac{1}{E} = 1{,}59 \cdot 10^{-11}\frac{m^2}{N} \quad ; \quad \frac{1}{G} = 3{,}52 \cdot 10^{-11}\frac{m^2}{N} \quad y \quad -\frac{\nu}{E} = -0{,}58 \cdot 10^{-11}\frac{m^2}{N}$$

de donde: $\nu = 0{,}58/1{,}59 = 0{,}365$.

El término $\frac{2(1+\nu)}{E} = 2\left(1+\frac{0{,}58}{1{,}59}\right) 1{,}59 \cdot 10^{-11}\frac{m^2}{N} = 4{,}34 \cdot 10^{-11}\frac{m^2}{N}$,

no es igual a $\frac{1}{G} = 3{,}52 \cdot 10^{-11}\frac{m^2}{N}$, por tanto, el material no es isótropo y presenta un total de *3* constantes elásticas independientes, una más que el material isótropo.

2º) La expresión de la nueva matriz de flexibilidad es: $S' = Q\,S\,Q^T$, siendo Q la matriz de transformación cuyas componentes son funciones cuadráticas homogéneas de los cosenos de los ángulos formados por los ejes de ambos sistemas. Las componentes de $Q_{ij}\ \left(i, j = 1,2,3....,6\right)$ son:

$$Q_{11} = n_{1'1}{}^2 = 1 \qquad Q_{21} = n_{2'1}{}^2 = 0 \qquad Q_{31} = n_{3'1}{}^2 = 0$$
$$Q_{12} = n_{1'2}{}^2 = 0 \qquad Q_{22} = n_{2'2}{}^2 = 3/4 \qquad Q_{32} = n_{3'2}{}^2 = 1/4$$
$$Q_{13} = n_{1'3}{}^2 = 0 \qquad Q_{23} = n_{2'3}{}^2 = 1/4 \qquad Q_{33} = n_{3'3}{}^2 = 3/4$$
$$Q_{14} = n_{1'2}\,n_{1'3} = 0 \qquad Q_{24} = n_{2'2}\,n_{2'3} = \sqrt{3}/4 \qquad Q_{34} = n_{3'2}\,n_{3'3} = -\sqrt{3}/4$$
$$Q_{15} = n_{1'1}\,n_{1'3} = 0 \qquad Q_{25} = n_{2'1}\,n_{2'3} = 0 \qquad Q_{35} = n_{3'1}\,n_{3'3} = 0$$
$$Q_{16} = n_{1'1}\,n_{1'2} = 0 \qquad Q_{26} = n_{2'1}\,n_{2'2} = 0 \qquad Q_{36} = n_{3'1}\,n_{3'2} = 0$$

$$Q_{41} = 2\,n_{2'1}\,n_{3'1} = 0 \qquad Q_{51} = 2\,n_{1'1}\,n_{3'1} = 0 \qquad Q_{61} = 2\,n_{1'1}\,n_{2'1} = 0$$
$$Q_{42} = 2\,n_{2'2}\,n_{3'2} = -\sqrt{3}/2 \qquad Q_{52} = 2\,n_{1'2}\,n_{3'2} = 0 \qquad Q_{62} = 2\,n_{1'2}\,n_{2'2} = 0$$
$$Q_{43} = 2\,n_{2'3}\,n_{3'3} = \sqrt{3}/2 \qquad Q_{53} = 2\,n_{1'3}\,n_{3'3} = 0 \qquad Q_{63} = 2\,n_{1'3}\,n_{2'3} = 0$$
$$Q_{44} = n_{2'2}\,n_{3'3} + n_{2'3}\,n_{3'2} = 1/2 \qquad Q_{54} = n_{1'2}\,n_{3'3} + n_{1'3}\,n_{3'2} = 0 \qquad Q_{64} = n_{1'2}\,n_{2'3} + n_{1'3}\,n_{2'2} = 0$$
$$Q_{45} = n_{2'1}\,n_{3'3} + n_{2'3}\,n_{3'1} = 0 \qquad Q_{55} = n_{1'1}\,n_{3'3} + n_{1'3}\,n_{3'1} = \sqrt{3}/2 \qquad Q_{65} = n_{1'1}\,n_{2'3} + n_{1'3}\,n_{2'1} = 1/2$$
$$Q_{46} = n_{2'1}\,n_{3'2} + n_{2'2}\,n_{3'1} = 0 \qquad Q_{56} = n_{1'1}\,n_{3'2} + n_{1'2}\,n_{3'1} = -1/2 \qquad Q_{66} = n_{1'1}\,n_{2'2} + n_{1'2}\,n_{2'1} = \sqrt{3}/2$$

Luego:

$$S' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}59 & -0{,}58 & -0{,}58 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}58 & 1{,}59 & -0{,}58 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}58 & -0{,}58 & 1{,}59 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3{,}52 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}52 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} 10^{-11}\,\frac{m^2}{N} = \begin{bmatrix} 1{,}59 & -0{,}58 & -0{,}58 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}58 & 1{,}43625 & -0{,}42625 & -0{,}1025\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -0{,}58 & -0{,}42625 & 1{,}43625 & 0{,}1025\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}1025\sqrt{3} & 0{,}1025\sqrt{3} & 4{,}135 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}52 \end{bmatrix} 10^{-11}\,\frac{m^2}{N}$$

Como se ha comentado en el primer apartado, al no ser el material isótropo, la matriz de flexibilidad cambia con el sistema de referencia.

3º) Las deformaciones vienen dadas por: $D = ST$. Para una tracción simple de *10MPa* según la primera dirección de la nueva referencia, las componentes de *T'* son:

$$\sigma_{1'} = 10MPa \quad ; \quad \sigma_{2'} = \sigma_{3'} = \sigma_{4'} = \sigma_{5'} = \sigma_{6'} = 0$$

Luego, utilizando la notación de doble subíndice, y haciendo $x \equiv 1'$, $y \equiv 2'$, $z \equiv 3'$ $\left(\sigma_{1'} \equiv \sigma_{xx}\right)$, las deformaciones quedan:

$$\varepsilon_{xx} = S_{1'1'}\,\sigma_{xx} = 1{,}59 \cdot 10^{-4} \quad ; \quad \gamma_{yz} = S_{4'1'}\,\sigma_{xx} = 0$$
$$\varepsilon_{yy} = S_{2'1'}\,\sigma_{xx} = -0{,}58 \cdot 10^{-4} \quad ; \quad \gamma_{xz} = S_{5'1'}\,\sigma_{xx} = 0$$
$$\varepsilon_{zz} = S_{3'1'}\,\sigma_{xx} = -0{,}58 \cdot 10^{-4} \quad ; \quad \gamma_{xy} = S_{6'1'}\,\sigma_{xx} = 0$$

En la Figura 15.b se tiene la deformada del cubo en las condiciones del enunciado (origen fijo y factor de ampliación *k=5.000* para las deformaciones):

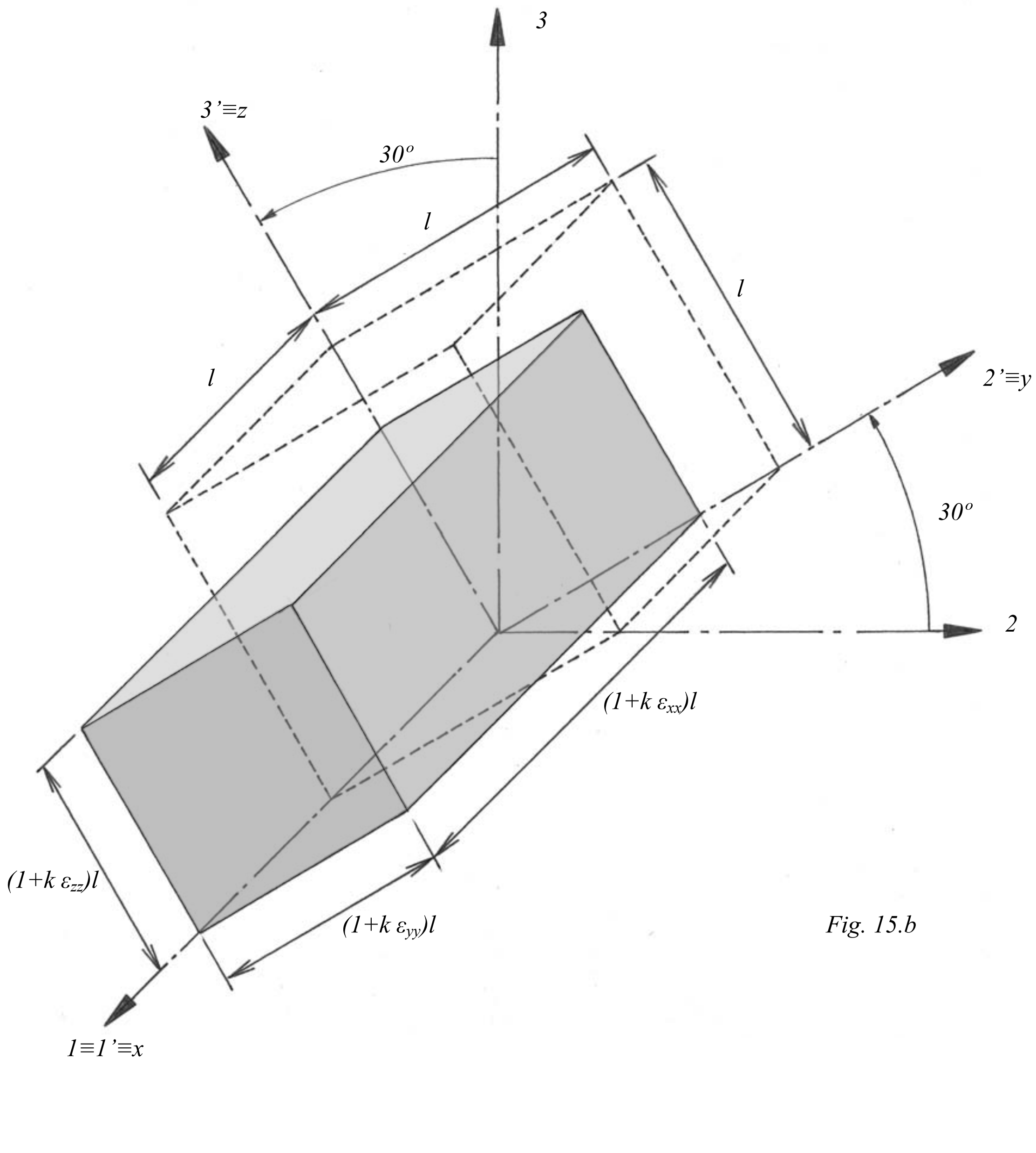

Fig. 15.b

4º) Para una tracción simple de *10MPa* según la segunda dirección de la nueva referencia, las componentes de *T'* son:

$$\sigma_{2'} = 10MPa \quad ; \quad \sigma_{1'} = \sigma_{3'} = \sigma_{4'} = \sigma_{5'} = \sigma_{6'} = 0$$

Luego, utilizando la notación de doble subíndice, y haciendo $x \equiv 1'$, $y \equiv 2'$, $z \equiv 3'$ $\left(\sigma_{2'} \equiv \sigma_{yy}\right)$, las deformaciones quedan:

$$\varepsilon_{xx} = S_{1'2'}\,\sigma_{yy} = -0{,}58{\cdot}10^{-4} \quad ; \quad \gamma_{yz} = S_{4'2'}\,\sigma_{yy} = -0{,}177{\cdot}10^{-4}$$

$$\varepsilon_{yy} = S_{2'2'}\,\sigma_{yy} = 1{,}44{\cdot}10^{-4} \quad ; \quad \gamma_{xz} = S_{5'2'}\,\sigma_{yy} = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = S_{3'2'}\,\sigma_{yy} = -0{,}43{\cdot}10^{-4} \quad ; \quad \gamma_{xy} = S_{6'2'}\,\sigma_{yy} = 0$$

En la Figura 15.c se tiene la deformada del cubo en las condiciones del enunciado (origen fijo, permitido el giro de una sola de las aristas coincidentes con los ejes de referencia y factor de ampliación *k=5.000* para las deformaciones):

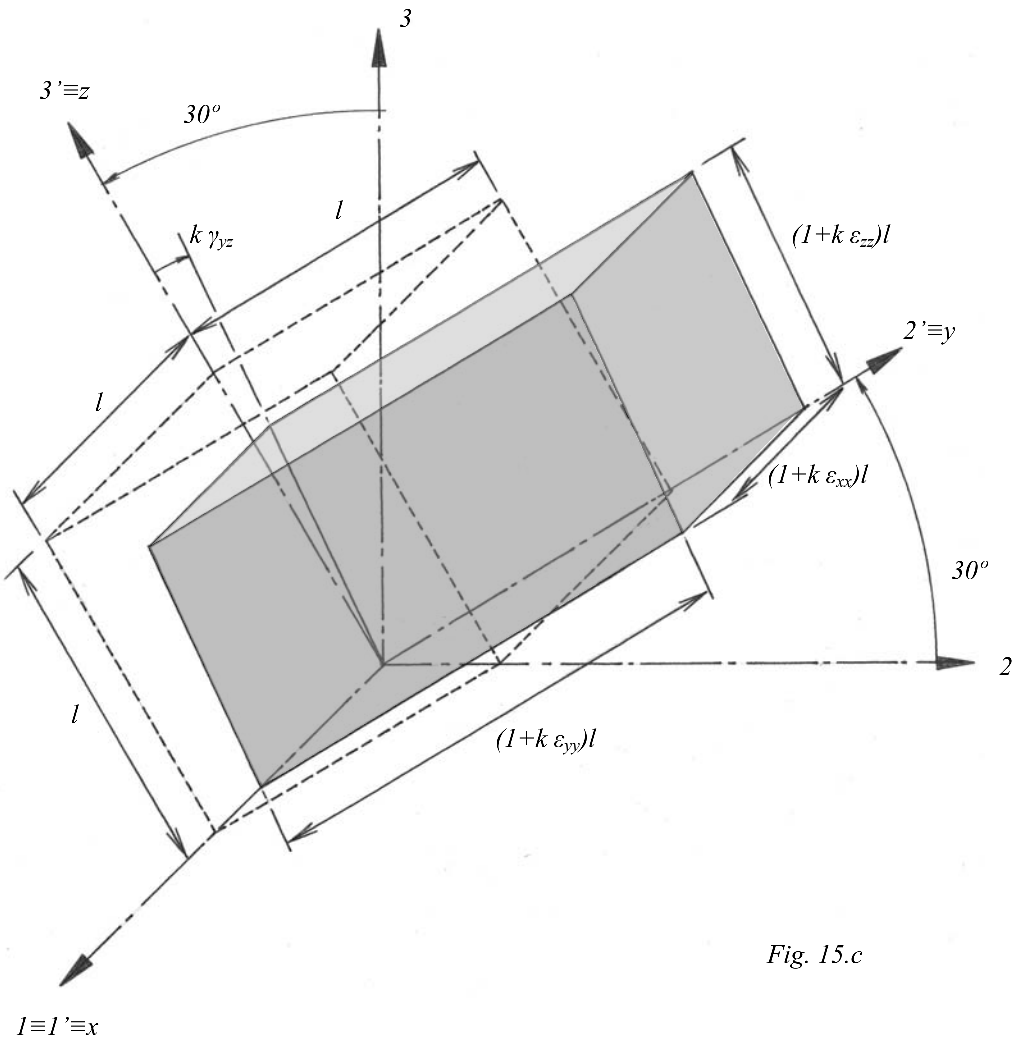

Fig. 15.c

5º) Para una tracción simple de *10MPa* según la segunda dirección de la nueva referencia, las componentes de *T'* son:

$$\sigma_{3'} = 10MPa \quad ; \quad \sigma_{1'} = \sigma_{2'} = \sigma_{4'} = \sigma_{5'} = \sigma_{6'} = 0$$

Luego, utilizando la notación de doble subíndice, y haciendo $x \equiv 1'$, $y \equiv 2'$, $z \equiv 3'$ $\left(\sigma_{3'} \equiv \sigma_{zz}\right)$, las deformaciones quedan:

$$\varepsilon_{xx} = S_{1'3'}\,\sigma_{zz} = -0{,}58{\cdot}10^{-4} \quad ; \quad \gamma_{yz} = S_{4'3'}\,\sigma_{zz} = -0{,}177{\cdot}10^{-4}$$
$$\varepsilon_{yy} = S_{2'3'}\,\sigma_{zz} = -0{,}46{\cdot}10^{-4} \quad ; \quad \gamma_{xz} = S_{5'3'}\,\sigma_{zz} = 0$$
$$\varepsilon_{zz} = S_{3'3'}\,\sigma_{zz} = 1{,}44{\cdot}10^{-4} \quad ; \quad \gamma_{xy} = S_{6'3'}\,\sigma_{zz} = 0$$

En la Figura 15.d se tiene la deformada del cubo en las condiciones del enunciado (origen fijo, permitido el giro de una sola de las aristas coincidentes con los ejes de referencia y factor de ampliación *k=5.000* para las deformaciones):

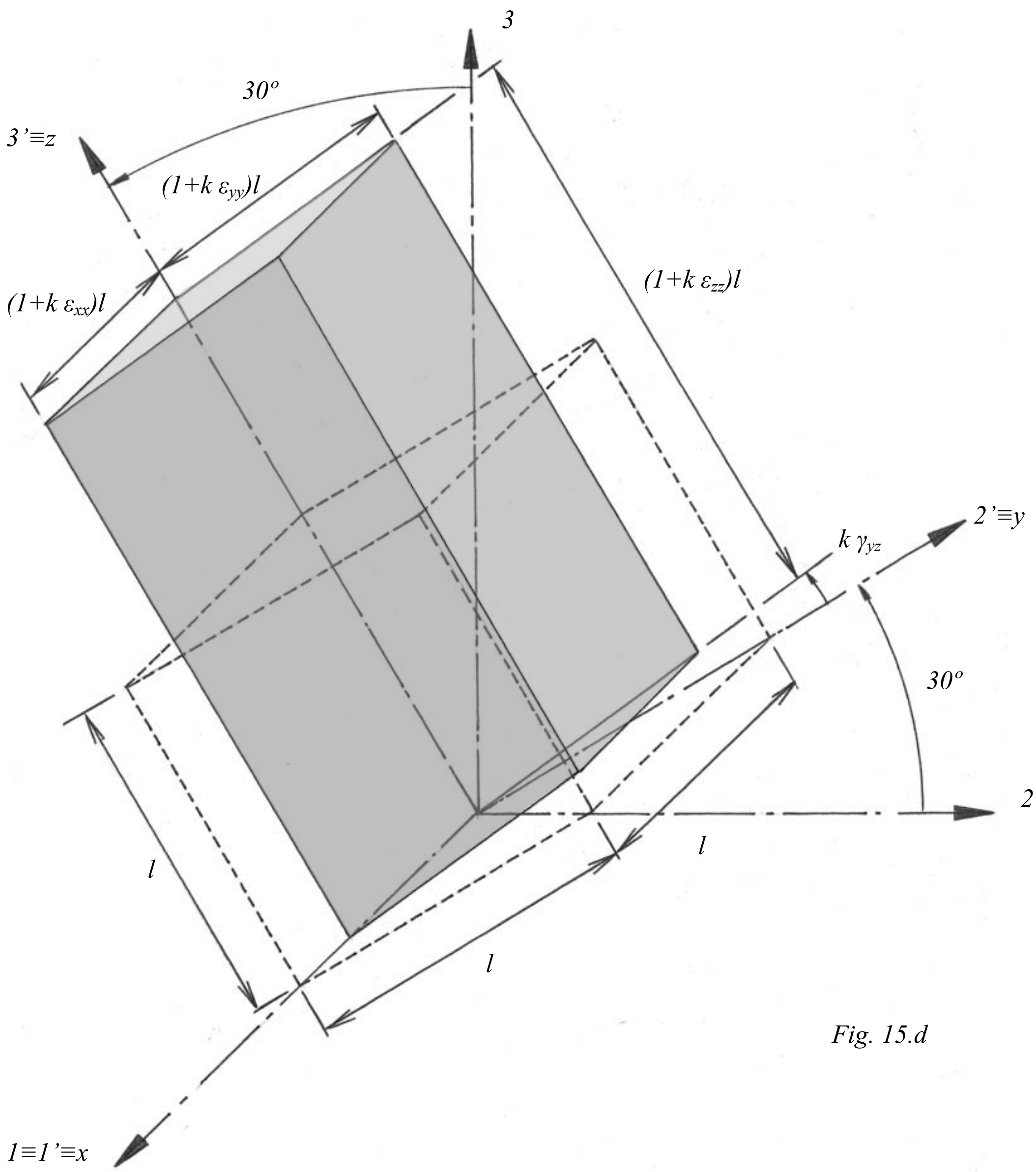

Fig. 15.d