PROBLEMA 19

TEMA: EL PROBLEMA ELÁSTICO LINEAL. Solución aproximada de desplazamientos mediante un planteamiento global basado en el Principio de los Trabajos Virtuales y en el Teorema de la Energía Mínima

Una placa de espesor uniforme e y sección cuadrada de arista a se encuentra empotrada por dos de sus bordes y sometida a una distribución uniforme de carga horizontal en la arista libre, tal como se indica en la Figura 19.1 . Suponiendo que el material de la placa tiene comportamiento de sólido elástico lineal, con $\lambda=G$ ($\nu=0,25$), se pide:

1º) Definir las condiciones de contorno y de simetría. Comentar si el problema tiene solución con un planteamiento local.

2º) Plantear como solución del problema un campo general de desplazamientos cuadrático cinemáticamente admisible

3º) Hallar las correspondientes deformaciones y tensiones, y comprobar si pueden constituir la solución del problema elástico

4º) Determinar en función de q y G un valor aproximado del desplazamiento en el plano xy de la arista cargada mediante la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales

5º) Ídem mediante la aplicación del Teorema de la Energía Mínima

(NOTA: en el siguiente problema se compararán las soluciones con la obtenida con un programa comercial de elementos finitos)

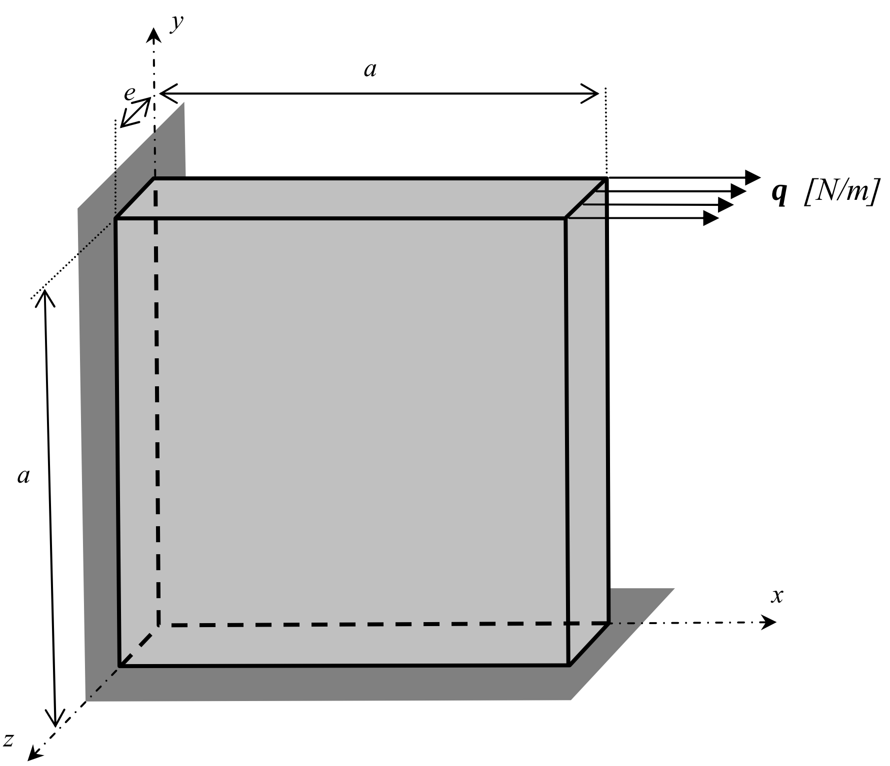

Fig. 19.1

SOLUCIÓN

1º) **Condiciones de contorno**

Al estar empotrados los bordes pertenecientes a los planos *x=0* , *y=0* , las condiciones de contorno en desplazamientos son:

$$\vec{u}(0,y,z) = u(0,y,z)\vec{i} + v(0,y,z)\vec{j} + w(0,y,z)\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$
$$\vec{u}(x,0,z) = u(x,0,z)\vec{i} + v(x,0,z)\vec{j} + w(x,0,z)\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

Como condición de contorno en fuerzas se tiene que en los puntos de la arista *(a,a,z)* hay una distribución uniforme $q\,\vec{i}$. Esta distribución es de fuerza por unidad de longitud $[N/m]$ y constituye una singularidad de la expresión general en términos de tensión: $\vec{f}_S = T\,\vec{n}$ $[N/m^2]$. Efectivamente, la distribución q implica $\vec{f}_S$ y T infinitas. En estas condiciones el problema no tiene solución con un planteamiento local.

Condiciones de simetría

El plano *z=e/2* es de simetría tanto geométrica como de condiciones de contorno. Por tanto, los desplazamientos según la dirección z deberán ser nulos en *z=e/2* y la solución para la componente w deberá incorporar el factor *(e/2-z)*.

2º) **Campo de desplazamientos cuadrático cinemáticamente admisible**

El campo de desplazamientos cuadrático y continuo más general supone para cada una de las componentes de $\vec{u}$ una función del tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J$$

Para que se verifiquen las condiciones de contorno en desplazamientos, solamente puede ser no nulo el término en xy para las componentes u y v , en tanto que para la componente w todos los términos deben ser nulos. Por tanto, el campo de desplazamientos cinemáticamente admisible es (se ha añadido un asterisco para distinguirlo del campo de desplazamientos real):

$$u^* = C_1 xy \quad ; \quad v^* = C_2 xy \quad ; \quad w^* = 0$$

3º) **Campos de deformaciones y de tensiones**

Las deformaciones correspondientes al campo de desplazamientos considerado son:

$$\varepsilon^*_{xx} = \frac{\partial u^*}{\partial x} = C_1 y \qquad ; \qquad \gamma^*_{xy} = \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} = C_1 x + C_2 y$$

$$\varepsilon^*_{yy} = \frac{\partial v^*}{\partial y} = C_2 x \qquad ; \qquad \gamma^*_{xz} = \frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial x} = 0$$

$$\varepsilon^*_{zz} = \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \qquad ; \qquad \gamma^*_{yz} = \frac{\partial v^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial y} = 0$$

Y las tensiones:

$$\sigma^*_{xx} = \lambda\theta^* + 2G\varepsilon^*_{xx} = G\left(3\varepsilon^*_{xx} + \varepsilon^*_{yy} + \varepsilon^*_{zz}\right) = G\left(3C_1 y + C_2 x\right)$$
$$\sigma^*_{yy} = \lambda\theta^* + 2G\varepsilon^*_{yy} = G\left(\varepsilon^*_{xx} + 3\varepsilon^*_{yy} + \varepsilon^*_{zz}\right) = G\left(C_1 y + 3C_2 x\right)$$
$$\sigma^*_{zz} = \lambda\theta^* + 2G\varepsilon^*_{zz} = G\left(3\varepsilon^*_{xx} + \varepsilon^*_{yy} + 3\varepsilon^*_{zz}\right) = G\left(C_1 y + C_2 x\right)$$
$$\tau^*_{xy} = G\gamma^*_{xy} = G\left(C_1 x + C_2 y\right)$$
$$\tau^*_{xz} = G\gamma^*_{xz} = 0$$
$$\tau^*_{yz} = G\gamma^*_{yz} = 0$$

Esta solución verifica las condiciones de continuidad y de contorno, por tanto, falta comprobar las condiciones de equilibrio. Teniendo en cuenta que las fuerzas de volumen son nulas, estas condiciones quedan:

$$\frac{\partial \sigma^*_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^*_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau^*_{zx}}{\partial z} = GC_2 + GC_2 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial \tau^*_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^*_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau^*_{zy}}{\partial z} = GC_1 + GC_1 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial \tau^*_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^*_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^*_{zz}}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

llevando a $C_1 = C_2 = 0$ y $T^* = 0$. Por tanto, el campo de desplazamientos planteado no es la solución del problema. Ya se ha comentado además, que la singularidad de la distribución q lleva a tensiones infinitas y, por tanto, también deformaciones infinitas, en la zona de aplicación de q *(x=a , y=a , z).*

4º) **Aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales para determinar un valor aproximado del desplazamiento de la arista cargada**

Aunque el campo de desplazamientos planteado no es la solución del problema, podemos hacer que se aproxime definiendo los coeficientes C_1 y C_2 de manera que se verifique el Principio de los Trabajos Virtuales para algunos desplazamientos virtuales debidamente escogidos. Esto supone efectivamente una aproximación a la solución real porque implica el cumplimiento parcial de las condiciones de equilibrio en todo punto.

Para una campo de desplazamientos virtual, $\delta\vec{u}$, se tendrán las deformaciones virtuales δD . Y el correspondiente trabajo de las fuerzas exteriores será:

$$\int_{z=0}^{z=e} q\,\delta u(a,a,z)\,dz$$

Y el de las fuerzas interiores correspondientes al campo $\vec{u}^*$:

$$\iiint\left(\sigma_{xx}^*\,\delta\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}^*\,\delta\varepsilon_{yy}+\sigma_{zz}^*\,\delta\varepsilon_{zz}+\tau_{yz}^*\,\delta\gamma_{yz}+\tau_{xz}^*\,\delta\varepsilon_{xz}+\tau_{xy}^*\,\delta\varepsilon_{xy}\right)dV$$

Igualándolos se obtiene una ecuación con C_1 y C_2 como únicos coeficientes indeterminados. Por tanto, se va a aplicar dos veces el PTV empleando campos de desplazamientos virtuales sencillos que llevan a una fácil solución de las integrales.

Como primer campo de desplazamientos virtual se propone (se supone que la expresión de la componente δu está multiplicada por una constante dimensional unitaria):

$$\delta u = xy \quad ; \quad \delta v = 0 \quad ; \quad \delta w = 0$$

Este campo es cinemáticamente admisible y se representa en la Figura 19.2. Las correspondientes deformaciones virtuales son:

$$\delta\varepsilon_{xx}=\frac{\partial\,\delta u}{\partial x}=y$$

$$\delta\varepsilon_{yy}=\delta\varepsilon_{zz}=\delta\gamma_{xz}=\delta\gamma_{yz}=0$$

$$\delta\gamma_{xy}=\frac{\partial\,\delta u}{\partial y}+\frac{\partial\,\delta v}{\partial x}=x$$

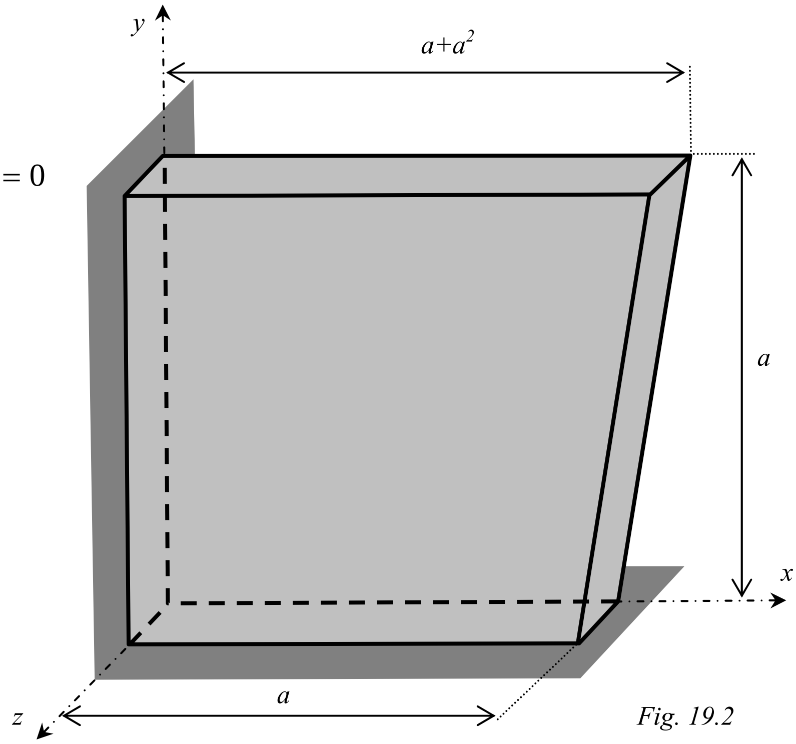

Fig. 19.2

El trabajo de las fuerzas exteriores es:

$$qe\,\delta u(a,a,z)=qea^2$$

Y el trabajo de las fuerzas interiores es:

$$\int_0^a\int_0^a\left[G(3C_1y+C_2x)y+G(C_1x+C_2y)x\right]e\,dx\,dy=Gea^4\left(\frac{4C_1}{3}+\frac{C_2}{2}\right)$$

Igualando ambos trabajos: $q=Ga^2\left(\frac{4C_1}{3}+\frac{C_2}{2}\right)$

Como segundo campo de desplazamientos virtual se propone (se supone que la expresión de la componente δv está multiplicada por una constante dimensional unitaria):

$$\delta u = 0 \quad ; \quad \delta v = xy \quad ; \quad \delta w = 0$$

Este campo también es cinemáticamente admisible y se representa en la Figura 19.3. Las correspondientes deformaciones virtuales son:

$$\delta\varepsilon_{xx} = \delta\varepsilon_{zz} = \delta\gamma_{xz} = \delta\gamma_{yz} = 0$$

$$\delta\varepsilon_{yy} = \frac{\partial \delta v}{\partial y} = x$$

$$\delta\gamma_{xy} = \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} = y$$

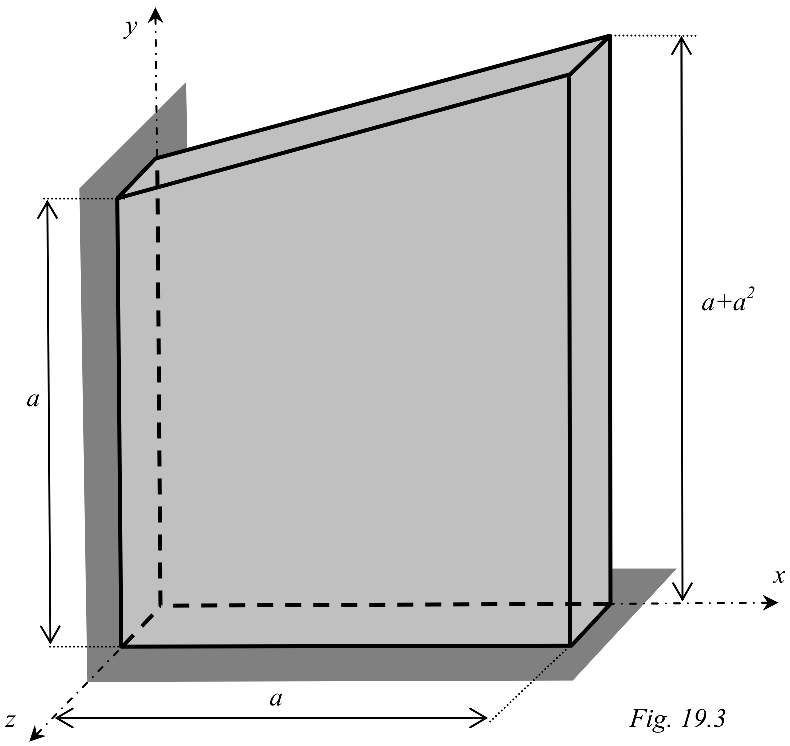

Fig. 19.3

El trabajo de las fuerzas exteriores es:

$$qe\,\delta u(a,a,z) = 0$$

Y el trabajo de las fuerzas interiores es:

$$\int_0^a \int_0^a \left[G(C_1 y + 3C_2 x)x + G(C_1 x + C_2 y)y\right] e\, dx\, dy = Gea^4\left(\frac{C_1}{2} + \frac{4C_2}{3}\right)$$

Igualando ambos trabajos se obtiene: $C_1 = -\dfrac{8C_2}{3}$

De las dos ecuaciones obtenidas con la aplicación del PTV se despejan los coeficientes:

$$C_1 = \frac{48q}{55Ga^2} \quad ; \quad C_2 = -\frac{18q}{55Ga^2}$$

Y el desplazamiento aproximado de la arista cargada queda:

$$u^*(a,a,z) = \frac{48q}{55G} = 0{,}873\frac{q}{G} \quad ; \quad v^*(a,a,z) = -\frac{18q}{55G} = -0{,}327\frac{q}{G} \quad ; \quad w^*(a,a,z) = 0$$

5º) **<u>Aplicación del Teorema de la Energía Mínima para determinar un valor aproximado del desplazamiento de la arista cargada</u>**

Al igual que con la aplicación del PTV, podemos aplicar el Teorema de la Energía Mínima para forzar el cumplimiento parcial de las condiciones de equilibrio en todo punto, y aproximar así el campo de desplazamientos planteado, $u^* = C_1 xy \quad ; \quad v^* = C_2 xy \quad ; \quad w^* = 0$, a la solución real.

Para este campo, el potencial de las fuerzas exteriores es:

$$V_T^* = -qeu^* = -qeC_1 a^2$$

Y la energía interna:

$$U_T^* = \frac{1}{2}\iiint\left(\sigma_{xx}^*\varepsilon_{xx}^* + \sigma_{yy}^*\varepsilon_{yy}^* + \sigma_{zz}^*\varepsilon_{zz}^* + \tau_{yz}^*\gamma_{yz}^* + \tau_{xz}^*\gamma_{xz}^* + \tau_{xy}^*\gamma_{xy}^*\right)dV =$$

$$= \frac{e}{2}\iint\left[G(3C_1 y + C_2 x)C_1 y + G(C_1 y + 3C_2 x)C_2 x + G(C_1 x + C_2 y)(C_1 x + C_2 y)\right]dx\,dy =$$

$$= Gea^4\left(C_1^{\,2} + C_2^{\,2} + \frac{C_1 C_2}{2}\right)$$

La energía total es, por tanto:

$$\Pi_T = V_T + U_T = -qeC_1 a^2 + Gea^4\left(C_1^{\,2} + C_2^{\,2} + \frac{C_1 C_2}{2}\right)$$

Y aplicando a la misma la condición de mínimo:

$$\frac{\partial \Pi_T}{\partial C_1} = -qea^2 + Gea^4\left(2C_1 + \frac{C_2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_T}{\partial C_2} = Gea^4\left(2C_2 + \frac{C_1}{2}\right) = 0$$

De donde se despeja: $C_1 = \dfrac{8q}{15Ga^2} \quad ; \quad C_2 = -\dfrac{2q}{15Ga^2}$

Y el desplazamiento aproximado de la arista cargada queda:

$$u^*(a,a,z) = \frac{8q}{15G} = 0{,}533\frac{q}{G} \quad ; \quad v^*(a,a,z) = -\frac{2q}{15G} = -0{,}133\frac{q}{G} \quad ; \quad w^*(a,a,z) = 0$$