PROBLEMA 20

TEMA: EL PROBLEMA ELÁSTICO LINEAL. Aplicación del Método de los Elementos Finitos con elementos triangulares de tres nodos

Para obtener una solución aproximada del Problema 19 (Figura 20.1), se simplifica el caso como un problema plano ($u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, $w=0$) y se aplica el Método de los Elementos Finitos con una discretización mínima de dos triángulos de tres nodos tal como se indica en la Figura 20.2.

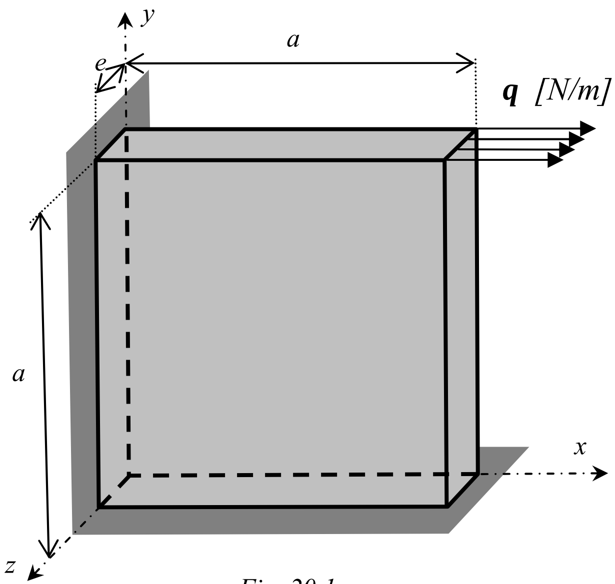

Fig. 20.1

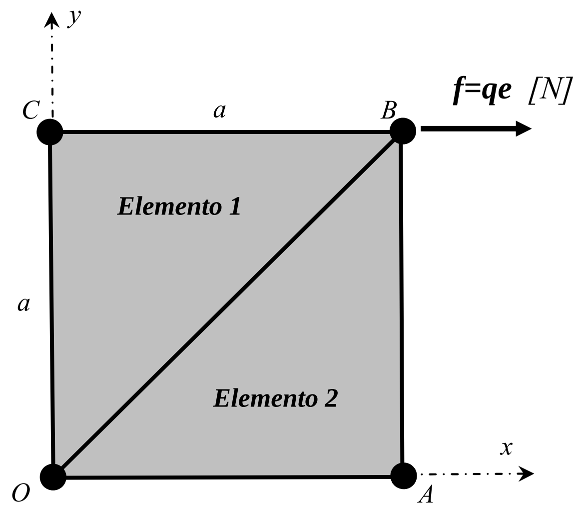

Fig. 20.2

Se pide:

1º) Escribir las condiciones de contorno para cada nodo

2º) Determinar la solución general de desplazamientos en cada elemento a partir de las funciones correspondientes al elemento triangular de tres nodos

3º) Comprobar que la solución de desplazamientos respeta la continuidad demostrando que el desplazamiento del Nodo *B* para cada elemento es el mismo

4º) Hallar en cada elemento las soluciones de deformaciones y de tensiones que se derivan de la solución general de desplazamientos planteada

5º) Hallar el potencial de las fuerzas exteriores, la energía interna y la energía total

6º) Determinar el desplazamiento del Nodo *B* aplicando la condición de mínimo de la energía total.

7º) Escribir la solución completa del problema elástico en función de a, q y G

8º) Representar a la misma escala la deformada de la placa del Problema 19 para todas las soluciones obtenidas, comparar y comentar las soluciones:

1.- Planteamiento de un campo de desplazamientos cuadrático y aplicación del PTV (Problema 19)

2.- Planteamiento de un campo de desplazamientos cuadrático y aplicación del Teorema de la Energía Mínima (Problema 19)

3.- Aplicación del Método de los Elementos Finitos. Discretización con elementos triangulares de 3 nodos (2 elementos y 4 nodos) (Problema 20)

4.- Aplicación del Método de los Elementos Finitos. Discretización con elementos rectangulares de 4 nodos (225 elementos y 256 nodos) (Programa ANSYS).

Desplazamiento del vértice cargado: $u(a,a) = 2{,}96\ q/G$; $v(a,a) = -1{,}60\ q/G$

SOLUCIÓN

1º) **Condiciones de contorno para cada nodo**

Los nodos O, A y C corresponden al borde empotrado de la placa, por tanto, las condiciones de contorno en desplazamientos para los mismos son:

Nodo O: $u_O = v_O = w_O = 0$
Nodo A: $u_A = v_A = w_A = 0$
Nodo C: $u_C = v_C = w_C = 0$

En el Método de los Elementos Finitos las condiciones de contorno en fuerzas se expresan en función de las fuerzas puntuales que actúan sobre los nodos. Para el caso del problema se tiene, pues:

Nodo C: $f_{Bx} = qe \quad , \quad f_{By} = 0$

2º) **Solución general de desplazamientos para cada elemento**

En un elemento triangular de 3 nodos se plantea un campo de desplazamientos lineal con la posición en el que los coeficientes a determinar son los propios desplazamientos de los nodos del elemento. La expresión de estos desplazamientos es la siguiente, y en la Figura 20.3 se representa un ejemplo de la deformación que experimenta un elemento genérico:

$$u = N_1(x,y)\cdot u_1 + N_2(x,y)\cdot u_2 + N_3(x,y)\cdot u_3$$
$$v = N_1(x,y)\cdot v_1 + N_2(x,y)\cdot v_2 + N_3(x,y)\cdot v_3$$

siendo:

(x_i , y_j), con $i , j = 1,2,3,$ las coordenadas de los nodos
(u_i , v_j), con $i , j = 1,2,3,$ los desplazamientos de los nodos

N_i, con $i , j = 1,2,3,$ las funciones de forma:

$$N_1 (x,y) = [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] / 2A_e$$
$$N_2 (x,y) = [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] / 2A_e$$
$$N_3 (x,y) = [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] / 2A_e$$
siendo $2A_e = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$

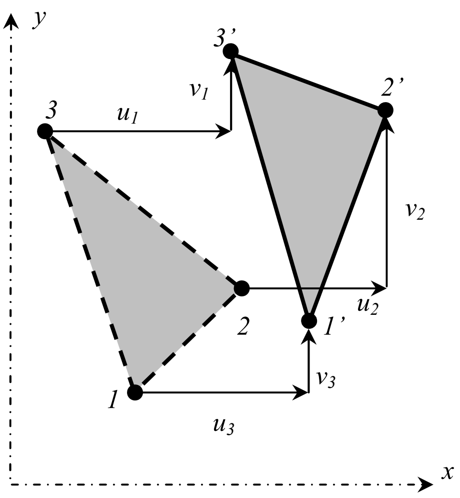

Fig. 20.3

En los elementos de la Figura 20.2 utilizamos la siguiente numeración:

.-Elemento 1: Nodo O ≡ 1 , Nodo C ≡ 2 , Nodo B ≡ 3
.-Elemento 2: Nodo O ≡ 1 , Nodo A ≡ 2 , Nodo B ≡ 3

y aplicando las condiciones de contorno en desplazamientos:

$$u_1 = u_2 = 0 \quad , \quad v_1 = v_2 = 0$$

la solución de desplazamientos en cada elemento queda:

$$u = N_3(x,y)\cdot u_3 \qquad , \qquad v = N_3(x,y)\cdot v_3$$

quedando las componentes u_3 , v_3 del desplazamiento del nodo libre, B≡3 , como incógnitas a determinar. Particularizando:

Elemento 1: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = a$, $x_3 = a$, $y_3 = a$

$$2A_e = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = -a^2$$

$$N_3(x,y) = \frac{1}{2A_e}\left[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\right] = \frac{x}{a}$$

Luego: $u = \dfrac{x}{a}u_3$, $v = \dfrac{x}{a}v_3$

Elemento 2: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = a$, $y_2 = 0$, $x_3 = a$, $y_3 = a$

$$2A_e = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = a^2$$

$$N_3(x,y) = \frac{1}{2A_e}\left[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\right] = \frac{y}{a}$$

Luego: $u = \dfrac{y}{a}u_3$, $v = \dfrac{y}{a}v_3$

3º) **<u>Comprobación de la continuidad de la solución de desplazamientos</u>**

En el Nodo B ($x=a$, $y=a$), se verifica en cada elemento que $N_3(a,a)=1$ y

$$u(a,a) = N_3(x_3,y_3)u_3 = u_3 \qquad ; \qquad v(a,a) = N_3(x_3,y_3)v_3 = v_3$$

4º) **<u>Solución de deformaciones</u>**

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_3}{\partial x}u_3 = \frac{y_1 - y_2}{2A_e}u_3$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N_3}{\partial y}v_3 = \frac{x_2 - x_1}{2A_e}v_3$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial N_3}{\partial y}u_3 + \frac{\partial N_3}{\partial x}v_3 = \frac{y_1 - y_2}{2A_e}u_3 + \frac{x_2 - x_1}{2A_e}v_3$$

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Solución de tensiones

$$\sigma_{xx} = \lambda\theta + 2G\varepsilon_{xx} = G\left(\frac{y_1 - y_2}{2A_e}u_3 + \frac{x_2 - x_1}{2A_e}v_3\right) + 2G\frac{y_1 - y_2}{2A_e}u_3$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\theta + 2G\varepsilon_{yy} = G\left(\frac{y_1 - y_2}{2A_e}u_3 + \frac{x_2 - x_1}{2A_e}v_3\right) + 2G\frac{x_2 - x_1}{2A_e}v_3$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\theta + 2G\varepsilon_{zz} = G\left(\frac{y_1 - y_2}{2A_e}u_3 + \frac{x_2 - x_1}{2A_e}v_3\right)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(\frac{x_2 - x_1}{2A_e}u_3 + \frac{y_1 - y_2}{2A_e}v_3\right)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0$$

Particularización de las soluciones para cada elemento

Elemento 1: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = a$, $x_3 = a$, $y_3 = a$, $2A_e = -a^2$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u_3}{a} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = 0 \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{v_3}{a} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{xx} = \frac{3Gu_3}{a} \quad ; \quad \sigma_{yy} = \frac{Gu_3}{a} \quad ; \quad \sigma_{zz} = \frac{Gu_3}{a} \quad ; \quad \tau_{xy} = \frac{Gv_3}{a} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Elemento 2: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = a$, $y_2 = 0$, $x_3 = a$, $y_3 = a$, $2A_e = a^2$

$$\varepsilon_{xx} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{v_3}{a} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{u_3}{a} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{xx} = \frac{Gv_3}{a} \quad ; \quad \sigma_{yy} = \frac{3Gv_3}{a} \quad ; \quad \sigma_{zz} = \frac{Gv_3}{a} \quad ; \quad \tau_{xy} = \frac{Gu_3}{a} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

5º) **Potencial de las fuerzas exteriores**

Dado que las fuerzas exteriores se reducen a la fuerza puntual que actúa en el Nodo B, la expresión del potencial es simplemente:

$$V_T = -f\,u_B = -f\,u_3$$

Energía interna

Teniendo en cuenta que $\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, la expresión de la energía interna en cada elemento es:

$$U_{Te} = \frac{1}{2}\iiint\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right)dV$$

Luego, la energía interna total es:

$$U_T = U_{T1} + U_{T2} = \frac{1}{2}\iiint\left(\frac{3Gu_3}{a}\frac{u_3}{a} + \frac{Gv_3}{a}\frac{v_3}{a}\right)dV + \frac{1}{2}\iiint\left(\frac{3Gv_3}{a}\frac{v_3}{a} + \frac{Gu_3}{a}\frac{u_3}{a}\right)dV =$$

$$= \frac{e}{2}\frac{1}{2}a^2\left[\frac{3G}{a^2}u_3^{\,2} + \frac{G}{a^2}v_3^{\,2} + \frac{3G}{a^2}v_3^{\,2} + \frac{G}{a^2}u_3^{\,2}\right] = eG\left(u_3^{\,2} + v_3^{\,2}\right)$$

Energía total $\quad \Pi_T = U_T + V_T = eG\left(u_3^{\,2} + v_3^{\,2}\right) - f\,u_3$

6º) **Determinación del desplazamiento del Nodo B**

Aplicando la condición de mínimo de la energía total se tiene:

$$\frac{\partial \Pi_T}{\partial u_3} = 2eGu_3 - f = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Pi_T}{\partial v_3} = 2eGv_3 = 0$$

De donde se obtiene: $\quad u_3 = \dfrac{f}{2Ge} \quad ; \quad v_3 = 0$

7º) **Solución completa del problema elástico en función de *a,e,q* y *G***

Elemento 1:

$$u = \frac{x}{a}u_3 = \frac{q}{2Ga}x \quad ; \quad v_3 = \frac{x}{a}v_3 = 0 \quad ; \quad w_3 = 0$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u_3}{a} = \frac{q}{2Ga} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = 0 \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{v_3}{a} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{xx} = \frac{3Gu_3}{a} = \frac{3q}{2a} \quad ; \quad \sigma_{yy} = \frac{Gu_3}{a} = \frac{q}{2a} \quad ; \quad \sigma_{zz} = \frac{Gu_3}{a} = \frac{q}{2a} \quad ; \quad \tau_{xy} = \frac{Gv_3}{a} = 0 \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Elemento 2:

$$u = \frac{y}{a}u_3 = \frac{q}{2Ga}y \quad ; \quad v_3 = \frac{y}{a}v_3 = 0 \quad ; \quad w_3 = 0$$

$$\varepsilon_{xx} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{v_3}{a} = 0 \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{u_3}{a} = \frac{q}{2Ga} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{xx} = \frac{Gv_3}{a} = 0 \quad ; \quad \sigma_{yy} = \frac{3Gv_3}{a} = 0 \quad ; \quad \sigma_{zz} = \frac{Gv_3}{a} = 0 \quad ; \quad \tau_{xy} = \frac{Gu_3}{a} = \frac{q}{2a} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

En la Figura 20.4 se ha representado la deformada resultante del modelo plano, así como el estado tensional en un elemento superficial de cada uno de los dos elementos finitos de la discretización.

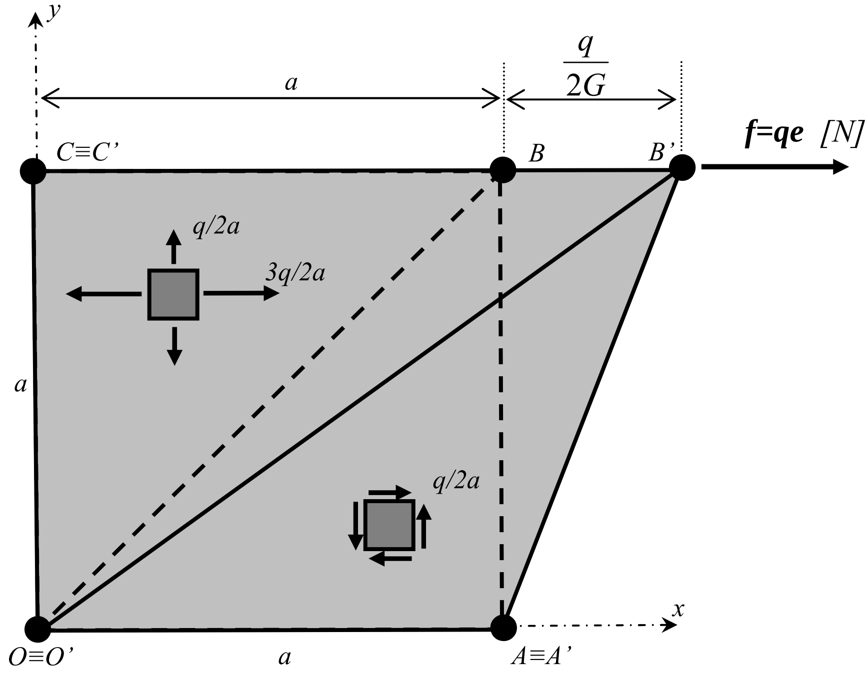

Fig. 20.4

8º) **Representación de la deformada de la placa del Problema 19 para todas las soluciones obtenidas**

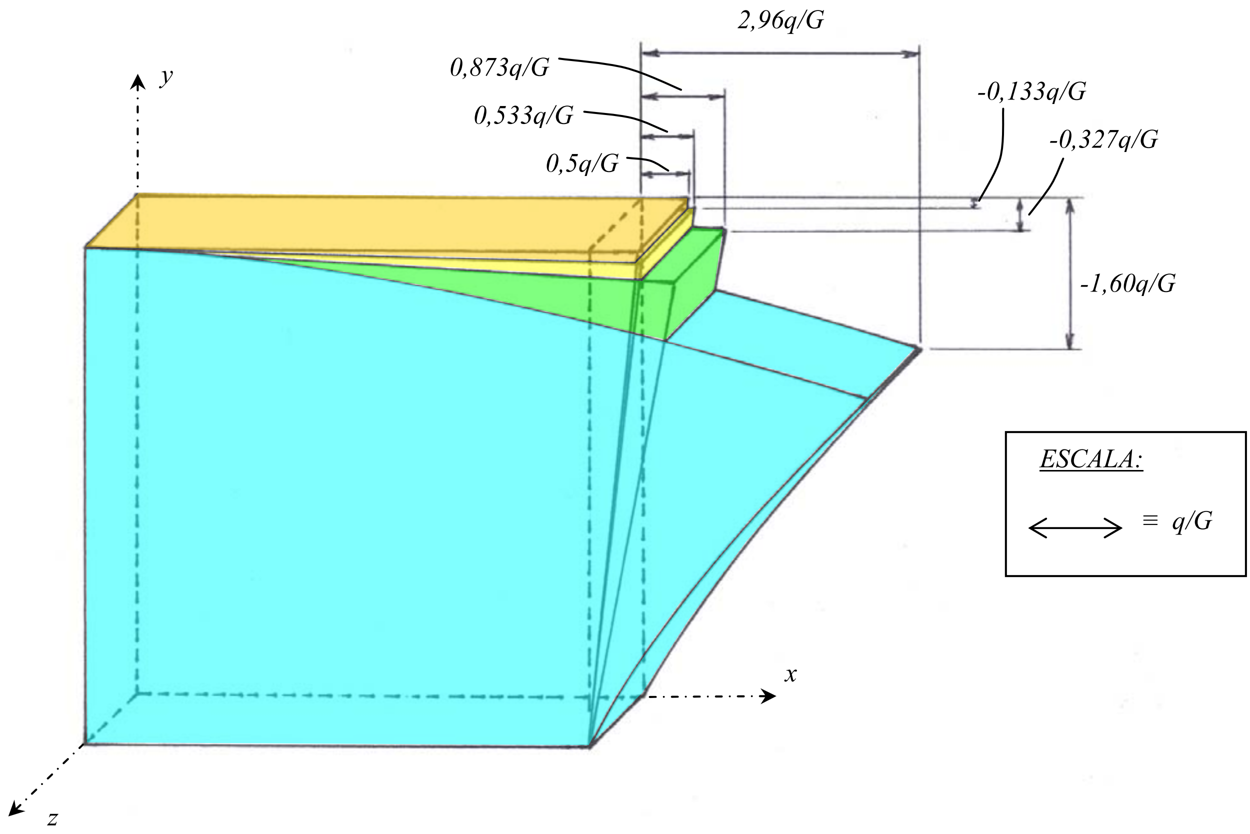

Fig. 20.4

Comentarios

Aplicación del Método de los Elementos Finitos. Discretización con elementos triangulares de 3 nodos (2 elementos y 4 nodos) (Problema 20): esta es la aproximación más pobre debido a que la discretización es de sólo dos elementos, y éstos son los más sencillos que se pueden adoptar, ya que el campo de desplazamientos asociado es sólo lineal.

Planteamiento de un campo de desplazamientos cuadrático y aplicación del Teorema de la Energía Mínima (Problema 19): la aproximación mejora al plantear un campo de desplazamientos cuadrático

Planteamiento de un campo de desplazamientos cuadrático y aplicación del PTV (Problema 19): el campo de desplazamientos también es cuadrático, pero la aproximación mejora al plantear el PTV para dos campos de desplazamientos virtuales

Aplicación del Método de los Elementos Finitos. Discretización con elementos rectangulares de 4 nodos (225 elementos y 256 nodos) (Programa ANSYS): esta es la solución más aproximada y se puede comprobar que converge para discretizaciones más afinadas; sin embargo, no es todavía la solución exacta porque, aparte del problema de la singularidad de la carga q , la modelización no considera desplazamientos según el eje z , con lo que ε_{zz} es nula y aparece una tensión σ_{zz} que deberá ser de tracción en todos los puntos, ya que frente a la carga q , la placa tiende a disminuir su espesor por efecto Poisson