PROBLEMA 24

TEMA: APLICACIONES DE LA ELASTICIDAD LINEAL. Problemas simples. Prisma sometido a su propio peso

Un cilindro de longitud ℓ y sección circular de radio $R=\ell/2$, se encuentra sometido a su propio peso y está apoyado sin rozamiento por la base. Hallar la solución completa del problema elástico si el material del cilindro tiene peso específico μ , módulo de Young E y coeficiente de Poisson $\nu=0,3$. Representar la deformada de una sección meridiana del cilindro empleando para los desplazamientos la escala: $\mu R^2 / E \equiv R/6$

SOLUCIÓN

Solución de tensiones

Tomando el sistema de referencia indicado en la Figura 24.1, para una sección genérica a una distancia z de la base se tendrá una distribución de tensión de compresión provocada por el peso de la porción de cilindro que está por encima de z. Suponiendo que la distribución es uniforme, tendremos que el estado tensional en los puntos de la sección vendrá dado por (siendo A el área de la sección):

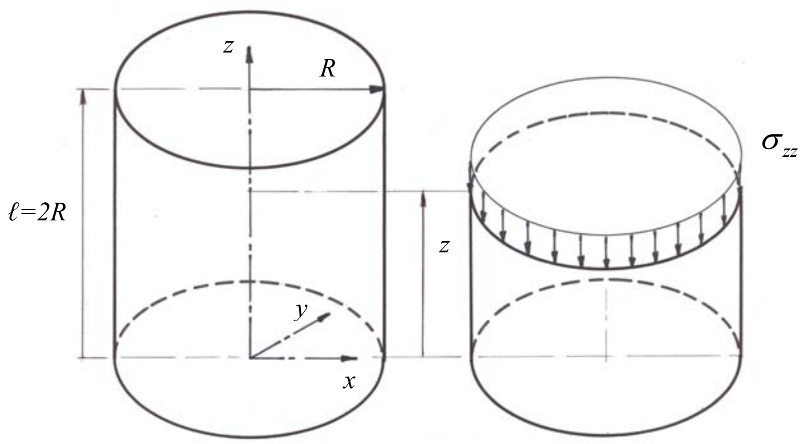

Fig. 24.1

$$\sigma_{zz} = -\mu A(\ell - z)/A = \mu(z-\ell) \qquad ; \qquad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

El tensor de tensiones referido a xyz , es, pues: $$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu(z-\ell) \end{pmatrix}$$

Esta solución deberá verificar las condiciones de equilibrio interno, que en este caso se reducen a la tercera: $f_{Vz} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = f_{Vz} + \mu = 0$. Luego el vector de fuerzas de volumen es: $\vec{f}_V(0,0,-\mu) \quad [N/m^3]$.

También deben verificarse las condiciones de equilibrio en el contorno, $\vec{f}_S = T\,\vec{n}$, que quedan:

.- Contorno lateral, $\vec{n}(n_x, n_y, 0)$: $\vec{f}_S = \vec{0}$

.- Base superior, $z = \ell$, $\vec{n}(0,0,1)$: $\vec{f}_S = \vec{0}$

.- Base inferior, $z = 0$, $\vec{n}(0,0,-1)$: $\vec{f}_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu\ell \end{pmatrix}$

Es decir, solamente hay fuerza superficial en el contorno correspondiente a la base inferior, y es una distribución uniforme de fuerza normal ascendente que, lógicamente, corresponde a la reacción de la superficie de apoyo. Al no haber rozamiento no hay componente tangencial de la fuerza de superficie.

<u>Solución de deformaciones y de desplazamientos</u>

Aplicando las leyes de Hooke generalizadas obtenemos la solución de deformaciones, quedando el tensor correspondiente de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{\nu}{E}\mu(z-\ell) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}\mu(z-\ell) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}\mu(z-\ell) \end{pmatrix}$$

Dado que las deformaciones son lineales en z (problema simple), se verifican directamente las condiciones de compatibilidad.

Para completar la solución del problema elástico faltan por obtener los desplazamientos. Partimos de las expresiones diferenciales de las componentes del vector giro:

$$d\omega_x = \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) dx + \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} \right) dy + \left(\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial z} \right) dz = \frac{\nu}{E}\mu\, dy$$

$$d\omega_y = \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) dy + \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \right) dz = -\frac{\nu}{E}\mu\, dx$$

$$d\omega_z = \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) dz = 0$$

Integrando: $\omega_x = \frac{\nu}{E}\mu\, y + C_1$; $\omega_y = -\frac{\nu}{E}\mu\, x + C_2$; $\omega_z = C_3$

Las constantes C_1 , C_2 y C_3 corresponden al giro del eje z , que es nulo por tratarse de un problema axisimétrico, con lo que: $C_1 = C_2 = C_3 = 0$

Las expresiones diferenciales de las componentes del desplazamiento son:

$$du = \varepsilon_{xx}dx + \left(\varepsilon_{xy} - \omega_z\right)dy + \left(\varepsilon_{xz} + \omega_y\right)dz = -\frac{\nu}{E}\mu\left(z-\ell\right)dx - \frac{\nu}{E}\mu\, xdz$$

$$dv = \left(\varepsilon_{xy} + \omega_z\right)dx + \varepsilon_{yy}dy + \left(\varepsilon_{yz} - \omega_x\right)dz = -\frac{\nu}{E}\mu\left(z-\ell\right)dy - \frac{\nu}{E}\mu\, ydz$$

$$d\omega = \left(\varepsilon_{xz} - \omega_y\right)dx + \left(\varepsilon_{yz} + \omega_x\right)dy + \varepsilon_{zz}dz = \frac{\nu}{E}\mu\, xdx + \frac{\nu}{E}\mu\, ydy + \frac{\nu}{E}\left(z-\ell\right)dz$$

Integrando:

$$u = -\frac{\nu}{E}\mu\left(z-\ell\right)x + K_1$$

$$v = -\frac{\nu}{E}\mu\left(z-\ell\right)y + K_2$$

$$\omega = \frac{\mu}{2E}\left(\nu\left(x^2+y^2\right) + z\left(z-2\ell\right)\right) + K_3$$

Nuevamente, por la simetría no se mueve el punto central de la base inferior que, al ser el origen del sistema de referencia, lleva a $K_1 = K_2 = K_3 = 0$. Con lo que queda completada la solución del problema elástico.

<u>Representación de la deformada de la sección meridiana</u>

Las secciones meridianas son las que contienen al eje z y, por la simetría, todas se deforman igual. Tomando la del plano $y=0$, y teniendo en cuenta que $\nu=0,3$, los desplazamientos en la misma son:

$$u = -\frac{\nu}{E}\mu\left(z-\ell\right)x = -0{,}3\left(z-2R\right)x\frac{\mu}{E}$$

$$\omega = \frac{\mu\nu}{2E}x^2 + \frac{\mu z}{2E}\left(z-2\ell\right) = \frac{\mu}{2E}\left(0{,}3x^2 + z\left(z-4R\right)\right)$$

En la Figura 24.3 se representa la deformada.

Obsérvese que el prisma se despega del suelo por los bordes de la base inferior, lo que, lógicamente, sólo ocurre si se mantiene aplicada e invariable la fuerza superficial de reacción . Esta condición no se da con una superficie de apoyo rígida.

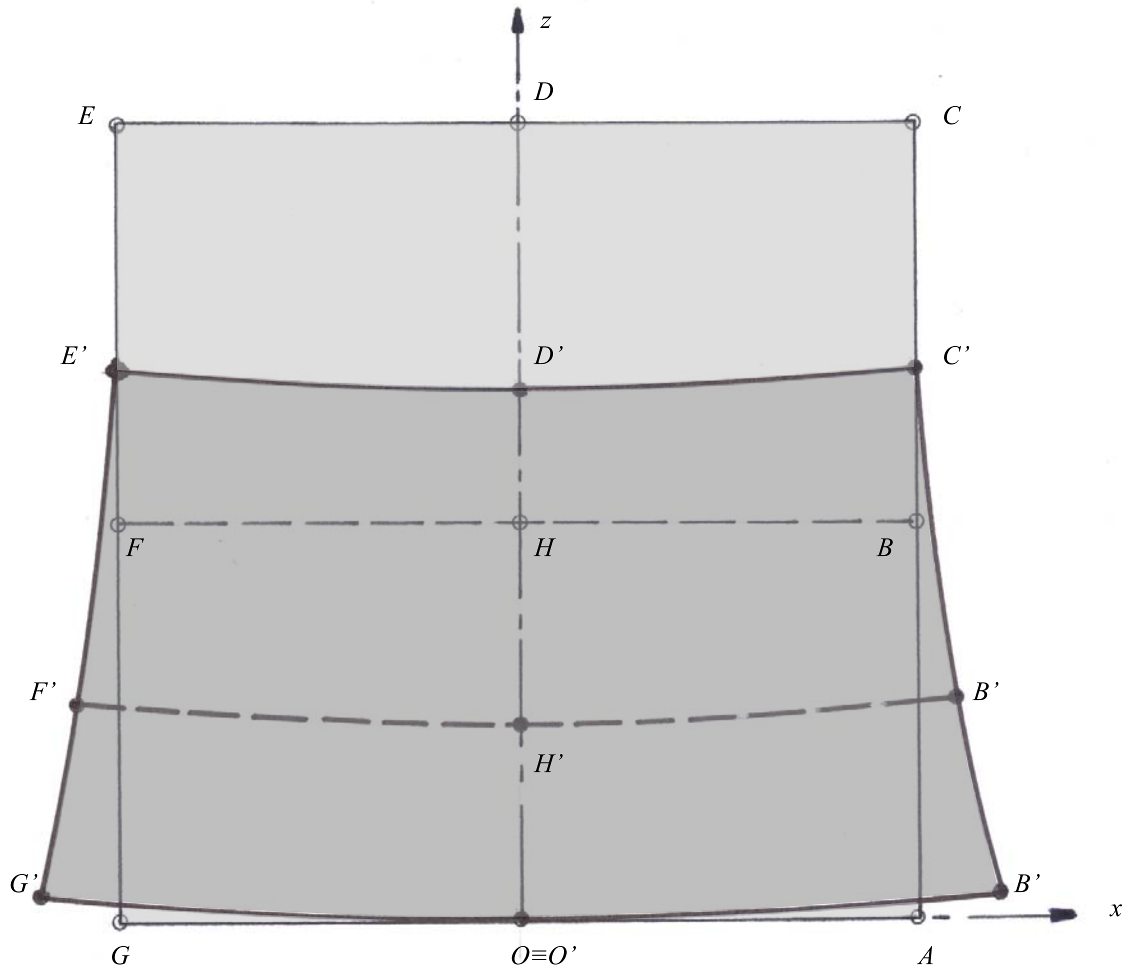

Fig. 24.2

	Coordenadas		Desplazamientos	
Puntos	***x***	***z***	***u***	***ω***
O	*0*	*0*	*0*	*0*
G , A	$\pm R$	*0*	$\pm 0{,}6\mu R^2/E$	$\pm 0{,}15\mu R^2/E$
H	*0*	$\ell/2$	*0*	$-1{,}5\mu R^2/E$
F , B	$\pm R$	$\ell/2$	$\pm 0{,}3\mu R^2/E$	$-1{,}35\mu R^2/E$
D	*0*	ℓ	*0*	$-2\mu R^2/E$
E , C	$\pm R$	ℓ	*0*	$-1{,}85\mu R^2/E$