PROBLEMA 26

TEMA: APLICACIONES DE LA ELASTICIDAD LINEAL. Placa empotrada-libre sometida a carga en el extremo libre. Solución de tensiones a partir de una función de Airy de 4º grado.

La placa empotrada-libre de pequeño espesor, *e=5mm*, de la Figura 26.1 se encuentra sometida a la carga ***P=1kN*** indicada. Para estudiar el problema elástico se modeliza la carga ***P*** como una fuerza de superficie $\vec{f}_S(0, f_{Sy}, 0)$ $[N/m^2]$, en la que f_{Sy} es una función polinómica de 2º grado en y simétrica respecto a x.

Se pide:

1º) Expresión de f_{Sy} en función de e, h y ***P***

2º) Función de Airy polinómica que verifica las condiciones de contorno de fuerzas y las condiciones de compatibilidad

3º) Hallar y representar las fuerzas superficiales y la solución de tensiones derivadas de la función de Airy. Comentar las discrepancias con la solución real

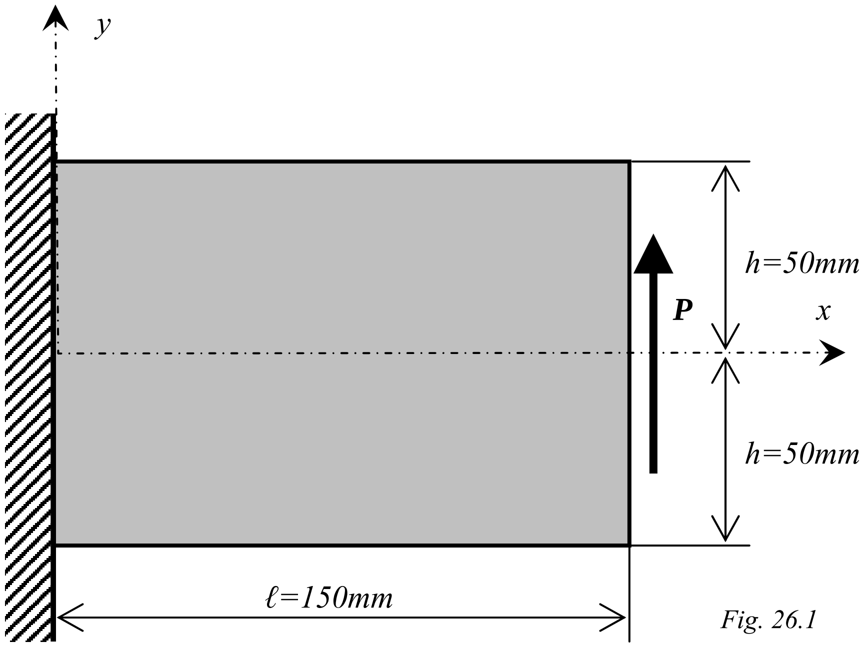

Fig. 26.1

SOLUCIÓN

1º) **Modelización de la carga *P* como una fuerza de superficie**

La fuerza de superficie $\vec{f}_S(0, f_{Sy}, 0)$ polinómica de segundo grado en y es: $f_{Sy} = ay^2 + by + c$

Por ser simétrica respecto a x: $f_{Sy}(+y) = f_{Sy}(-y)$, luego, $b=0$.

La f_{Sy} constituye la tensión tangencial τ_{xy} y los bordes horizontales están libres de carga, luego, para que se verifique el teorema de reciprocidad de las tensiones tangenciales debe cumplirse que: $f_{Sy}(\pm h) = ah^2 + c = 0$, quedando: $f_{Sy} = a(y^2 - h^2)$.

La resultante de f_{Sy} tiene que ser igual a ***P***, luego: $P = \iint f_{Sy}\,dydz = e\int_{-h}^{h} a(y^2 - h^2)dy = -\frac{4}{3}eah^3$

quedando: $\vec{f}_S\left(0, \frac{3P}{4eh^3}(h^2 - y^2), 0\right)$

2º) **Función de Airy polinómica**

Dado que en el lado $x=\ell$ hay una distribución de fuerzas de superficie cuadrática en y, se plantea una función de Airy polinómica de cuarto grado:

$$\phi = Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4 + Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Iy^3 + Jx^2 + Kxy + Ly^2$$

de la que se derivan las tensiones (se omiten los términos de las fuerzas de volumen por considerarse nulas):

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 2Cx^2 + 6Dxy + 12Ey^2 + 2Hx + 6Iy + 2L$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 12Ax^2 + 6Bxy + 2Cy^2 + 6Fx + 6Gy + 2J$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = -3Bx^2 - 4Cxy - 3Dy^2 - 2Gx - 2Hy - K$$

Aplicando las condiciones de equilibrio en el contorno, $\vec{f}_S = T\,\vec{n}$:

.- Borde $y = h$, $\vec{n}(0,1,0)$: $f_{Sx} = \tau_{xy} = 0$, $f_{Sy} = \sigma_{yy} = 0$, luego:

$$\sigma_{yy} = 12Ax^2 + 6Bxh + 2Ch^2 + 6Fx + 2Gh + 2J = 0$$

$$\tau_{xy} = -3Bx^2 - 4Cxh - 3Dh^2 - 2Gx - 2Hh - K = 0$$

Identificando coeficientes se obtiene:

$$A = 6Bh + 6F = 2Ch^2 + 2Gh + 2J = 0$$

$$B = 4Ch + 2G = 3Dh^2 + 2Hh + K = 0$$

.- Borde $y = -h$, $\vec{n}(0,-1,0)$: $f_{Sx} = -\tau_{xy} = 0$, $f_{Sy} = -\sigma_{yy} = 0$, luego:

$$\sigma_{yy} = 12Ax^2 - 6Bxh + 2Ch^2 + 6Fx - 2Gh + 2J = 0$$

$$\tau_{xy} = -3Bx^2 + 4Cxh - 3Dh^2 - 2Gx + 2Hh - K = 0$$

Identificando:

$$A = -6Bh + 6F = 2Ch^2 - 2Gh + 2J = 0$$

$$B = 4Ch - 2G = -3Dh^2 + 2Hh - K = 0$$

Quedando: $A = B = C = F = G = H = J = 0$, $3Dh^2 + K = 0$

.- Borde $x = \ell$, $\vec{n}(1,0,0)$: $f_{Sx} = 0$, $f_{Sy} = \tau_{xy}$, luego:

$$\sigma_{xx} = 2C\ell^2 + 6D\ell y + 12Ey^2 + 2H\ell + 6Iy + 2L = 0$$

$$\tau_{xy} = -3B\ell^2 - 4C\ell y - 3Dy^2 - 2G\ell - 2Hy - K = \frac{3P}{4eh^3}\left(h^2 - y^2\right)$$

Identificando:

$$12E = 0 \quad ; \quad 6D\ell + 6I = 0 \quad ; \quad 2C\ell^2 + 2H\ell + 2L = 0$$

$$-3D = -\frac{3P}{4eh^3} \quad ; \quad -4C\ell - 2H = 0 \quad ; \quad -3B\ell^2 - 2G\ell - K = \frac{3P}{4eh}$$

De todas estas relaciones quedan determinados todos los coeficientes de la función ϕ , sin necesidad de verificar la condición de contorno en $x = 0$:

$$A = B = C = E = F = G = H = J = L = 0 \quad ; \quad D = \frac{P}{4eh^3} \quad ; \quad I = -\frac{P\ell}{4eh^3} \quad ; \quad K = -\frac{3P}{4eh}$$

Y la función de Airy es: $\phi = \frac{P}{4eh^3}xy^3 - \frac{P\ell}{4eh^3}y^3 - \frac{3P}{4eh}xy$

Finalmente, se comprueba que se verifica la condición de compatibilidad de las deformaciones:

$$\Delta^2\phi = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\left(\frac{P}{4eh^3}xy^3 - \frac{P\ell}{4eh^3}y^3 - \frac{3P}{4eh}xy\right) = 0$$

3º) **Solución de tensiones**

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{3P}{2eh^3}y(x-\ell) \quad ; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} = \frac{3P}{4eh}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

Valores máximos:

$$\sigma_{xx\,máx} = \sigma_{xx}(x = 0, y = \pm h) = \mp\frac{3P}{2eh^2}\ell = \mp\frac{3 \cdot 1kN}{2 \cdot 5mm \cdot 50^2 mm^2}150mm = \mp 18MPa$$

$$\tau_{xy\,máx} = \tau_{xy}(y = 0) = \frac{3P}{4eh} = \frac{3 \cdot 1kN}{4 \cdot 5mm \cdot 50mm} = 3MPa$$

La función Airy sería la solución del problema si las reacciones del empotramiento coincidieran con las fuerzas de superficie en el borde (*x=0*) y en el mismo borde se produjeran los desplazamientos que se derivan de las deformaciones resultantes de las deformaciones.

En la realidad esto no es así por estar restringidos todos los desplazamientos en *x=0* , por lo que la solución hallada se aleja de la realidad en las proximidades del empotramiento

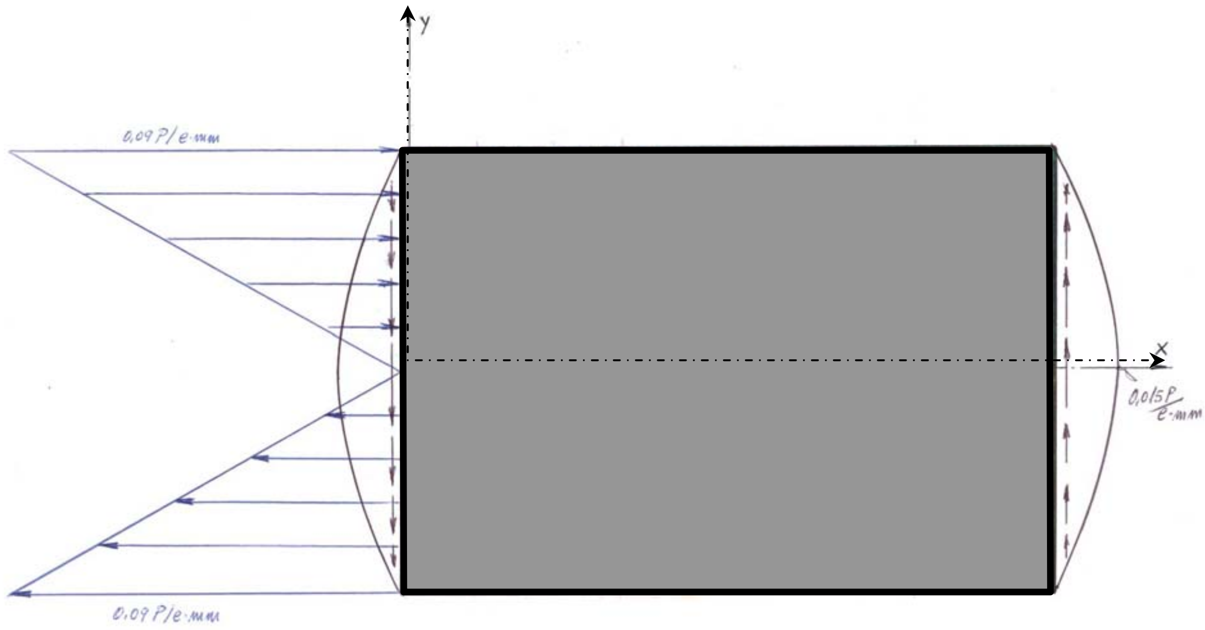

Fig. 26.2.- Representación de las fuerzas de superficie

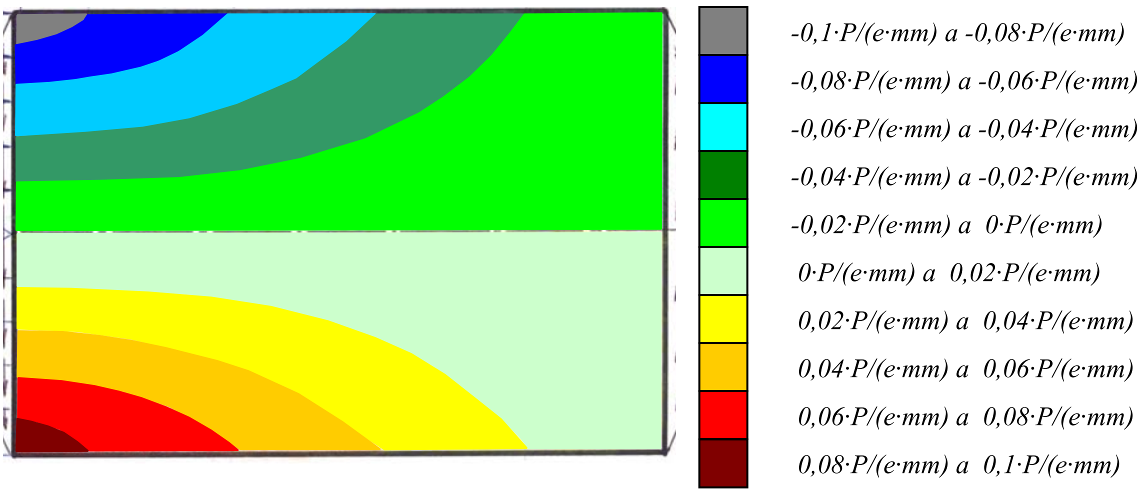

Fig. 26.3.- Representación de la componente σ_{xx}

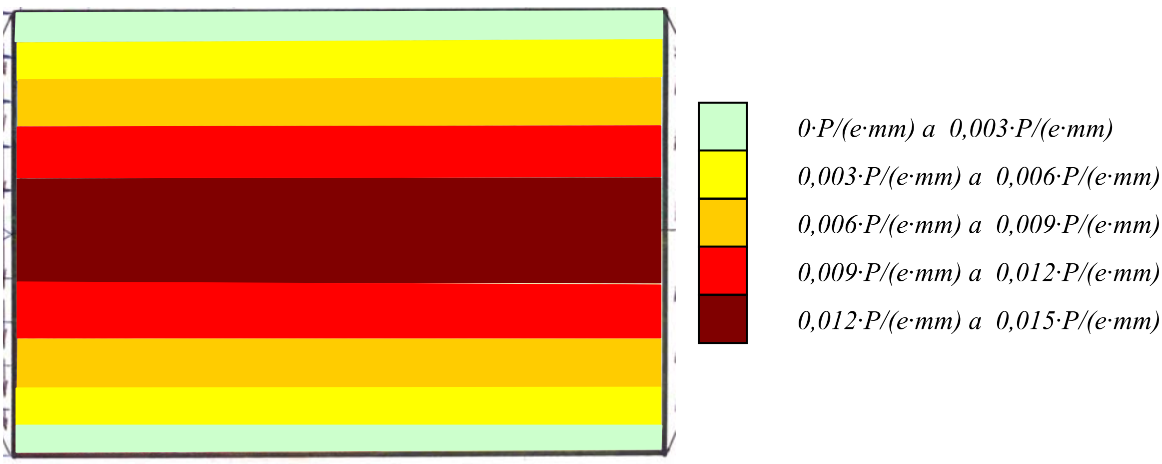

Fig. 26.4.- Representación de la componente τ_{xy}