ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE
INGENIEROS INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE
MADRID

ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES **CURSO 2000-2001**

PRIMER EXAMEN PARCIAL **6-2-2001**

CUESTIONES (BLOQUE 1)

1.- En un cuerpo elástico existe un estado tensional cuya matriz de tensiones, referida a un sistema cartesiano ortogonal es $[T]=\begin{pmatrix} 2x+10 & 3y-30 & 5z-20 \\ 3y-30 & 2y-10 & 3z+20 \\ 5z-20 & 3z+20 & 3z-30 \end{pmatrix}$ en la que las tensiones vienen dadas en MPa cuando las coordenadas se expresan en cm.

Calcular en el punto interior P (15,10,10) cm:

1º.- Las componentes intrínsecas del vector tensión que corresponde al plano que pasa por P y corta al eje x en el punto A (45, 0, 0) cm y al eje z en C (0, 0, 27) cm.

2º.- La tensión normal octaédrica en el punto P.

1º) El plano PAC tiene de vector característico

$$\vec{PC} \times \vec{PA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -15 & -10 & 17 \\ 30 & -10 & -10 \end{vmatrix} = 270\vec{i} + 360\vec{j} + 450\vec{k} = 90\sqrt{50}\left(\frac{3}{\sqrt{50}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{50}}\vec{j} + \frac{5}{\sqrt{50}}k\right)$$

El vector tensión correspondiente al plano es

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 30 \\ 0 & 10 & 50 \\ 30 & 50 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix} 270 \\ 290 \\ 290 \end{pmatrix}$$

cuyas componentes intrínsecas son:

$$\boxed{\sigma_n} = \frac{270 \times 3 + 290 \times 4 + 290 \times 5}{50} = \boxed{68.4 \text{ MPa}}$$

$$\boxed{\tau} = \sqrt{\frac{1}{50}\left(270^2 + 290^2 + 290^2\right) - 68.4^2} = \boxed{11.98 \text{ MPa}}$$

2º) Para el cálculo de la tensión normal octaédrica

$$\sigma_{no} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

tendremos en cuenta que la traza de la matriz de tensiones es invariante.

Por consiguiente:

$$\boxed{\sigma_{no}} = \frac{\sigma_{nx} + \sigma_{ny} + \sigma_{nz}}{3} = \frac{50}{3} = \boxed{16,\hat{6} \text{ MPa}}$$

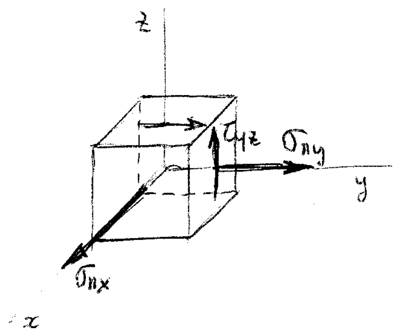
2.- En un punto P interior de un sólido elástico la matriz de tensiones es

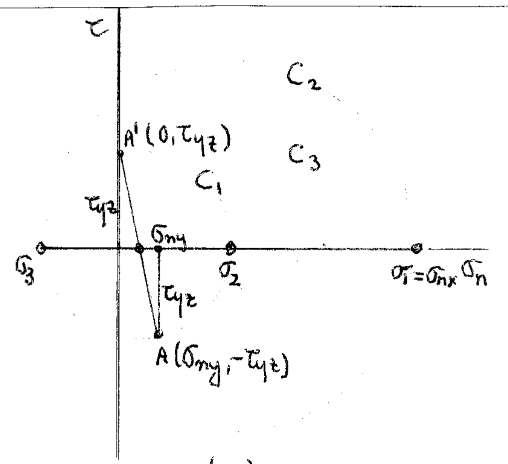
$$[T] = \begin{pmatrix} \sigma_{nx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ny} & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide determinar los valores de σ_{nx}, σ_{ny}, τ_{yz}, sabiendo que:

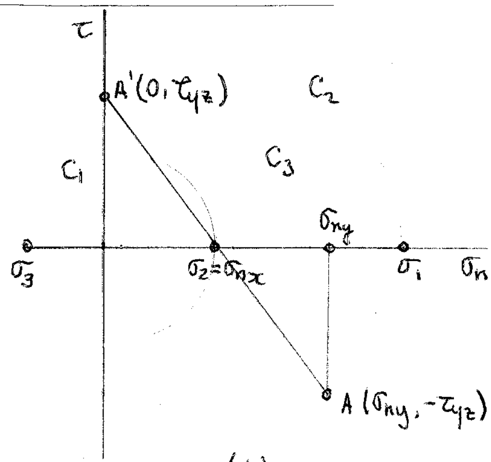
a)- Se conocen las tensiones principales $\sigma_1 = 160$ MPa y $\sigma_3 = -40$ MPa.

b)- Son iguales las tensiones tangenciales máximas en los haces de planos que contienen los ejes principales primero y tercero.





(a)



(b)

De la matriz de tensiones y de las condiciones dadas se deduce:

- El eje x es dirección principal.
- La otra tensión principal es $\sigma_2 = \dfrac{160+(-40)}{2} = 60$ MPa

A partir de aquí se pueden hacer las siguientes hipótesis:

a) $\boxed{\sigma_{nx}} = \sigma_1 = \boxed{160 \text{ MPa}}$

En este caso, los puntos A y A' representativos de las tensiones en las caras perpendiculares a los ejes y y z, respectivamente, pertenecen al círculo de Mohr C_1 (figura a). Directamente de los círculos de Mohr se obtiene

$\boxed{\sigma_{ny} = 20 \text{ MPa}}$; $\tau_{yz}^2 = 40 \times 60 \Rightarrow \boxed{\tau_{yz} = \pm 20\sqrt{6} \text{ MPa}}$

b) $\boxed{\sigma_{nx}} = \sigma_2 = \boxed{60 \text{ MPa}}$

En este caso los puntos A y A' pertenecen al círculo C_2 (figura b)

$\boxed{\sigma_{ny} = 120 \text{ MPa}}$; $\tau_{yz}^2 = 40 \times 160 \Rightarrow \boxed{\tau_{yz} = \pm 80 \text{ MPa}}$

c) $\sigma_{nx} = \sigma_3 = -40$ MPa

No es posible, porque en el círculo de Mohr C_3 no hay ningún punto representativo que tenga tensión normal nula.

3.- Las componentes de la matriz de deformación de un estado de deformación plana son:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = A_0 + A_1(x^2+y^2) + x^4 + y^4 \\ \varepsilon_y = B_0 + B_1(x^2+y^2) + x^4 + y^4 \\ \gamma_{xy} = C_0 + C_1\, xy\,(x^2+y^2+C_2) \\ \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

Determinar las relaciones que tienen que existir entre las constantes A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1 y C_2.

Por tratarse de un estado de deformación plana, de las seis ecuaciones de compatibilidad cinco se verifican identicamente. Luego sólo habrá que comprobar la verificación de la ecuación

$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = 3C_1x^2 + 3C_1y^2 + C_1C_2$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} = 2A_1 + 12y^2$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = 2B_1 + 12x^2$$

$$3C_1x^2 + 3C_1y^2 + C_1C_2 = 2A_1 + 12y^2 + 2B_1 + 12x^2$$

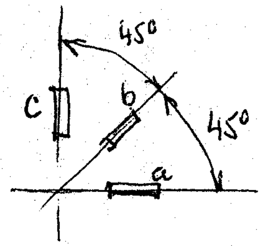
$$(3C_1 - 12)(x^2+y^2) + C_1C_2 - 2A_1 - 2B_1 = 0$$

Como se tiene que verificar para todo x e y, se tiene que cumplir

$$\boxed{\begin{array}{l} C_1 = 4\,; \quad A_1 + B_1 = 2C_2 \\ A_0,\ B_0 \text{ y } C_0 \text{ pueden ser arbitrarios} \end{array}}$$

4.- Se considera una roseta rectangular adherida a la superficie libre de un sólido elástico en un punto P. Una vez sometido a carga el sólido, las lecturas de las galgas son ε_a, ε_b y ε_c.

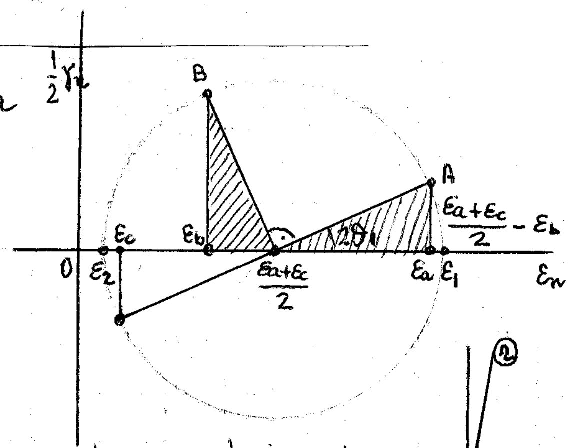
Hallar las expresiones de las deformaciones principales en función de ε_a, ε_b y ε_c. Determinar sus valores cuando las lecturas de las galgas son las siguientes, así como dibujar en el punto P las direcciones principales.



$\varepsilon_a = 30\cdot10^{-4}$ $\qquad$ $\varepsilon_b = 0$ $\qquad$ $\varepsilon_c = -15\cdot10^{-4}$

De la igualdad de los dos triángulos rayados en la figura, se deduce:

$$\boxed{\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2} - \varepsilon_b\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_c}{2}\right)^2}}$$



Para la aplicación dada

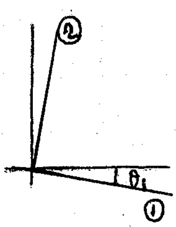
$$\varepsilon_{1,2} = \left[\frac{30-15}{2} \pm \sqrt{7'5^2 + (30-7'5)^2}\right]\times10^{-4}$$

Se obtienen: $\boxed{\varepsilon_1 = 31{,}22\times10^{-4}\,; \quad \varepsilon_2 = -16{,}22\times10^{-4}}$

Direcciones principales:

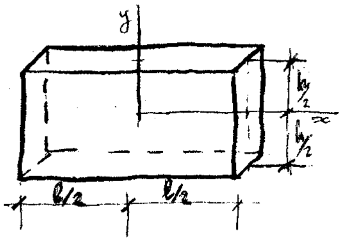
$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{7{,}5}{22{,}5} = 0{,}333$$

$$\theta_1 = 9{,}21^\circ$$



5.- La solución de tensiones en una placa rectangular de longitud *l*, ancho h y espesor unidad, referida al sistema de referencia cartesiano ortogonal indicado en la figura es:

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = x^3y - 2xy^3 \\ \sigma_{ny} = xy^3 - 2axy + bx \\ \tau_{xy} = -\frac{3}{2}x^2y^2 + ax^2 + \frac{1}{2}y^4 + c \\ \sigma_{nz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$



Sabiendo que las condiciones de contorno de la placa son:

Para $y = \pm\frac{h}{2}$: $\tau_{xy} = 0$

$y = -\frac{h}{2}$: $\sigma_{ny} = 0$

Se pide:

1°.- Determinar los valores de las constantes a, b y c.

2°.- Hallar la carga total que actúa en las secciones extremas derecha e izquierda.

1°) De las ecuaciones de equilibrio interno se deduce que las fuerzas de masa por unidad de volumen son nulas.

De las condiciones de contorno se deducen los valores de a, b y c.

* $y = \pm\frac{h}{2}$; $\tau_{xy} = 0$: $-\frac{3}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 x^2 + ax^2 + \frac{1}{2}\frac{h^4}{2^4} + c = 0$

$$\left(-\frac{3h^2}{8} + a\right)x^2 + \frac{h^4}{32} + c = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{3h^2}{8} ; \quad c = -\frac{h^4}{32}}$$

* $y = -\frac{h}{2}$; $\sigma_{ny} = 0$: $-x\frac{h^3}{8} + 2\,\frac{3h^2}{8}\,\frac{h}{2}x + bx = 0$

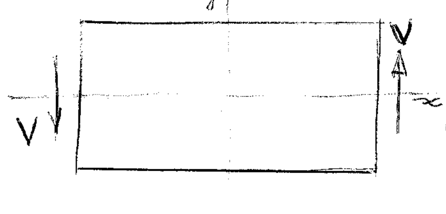
$$\left(-\frac{h^3}{8} + \frac{3h^3}{8} + b\right)x = 0 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{h^3}{4}}$$

2°) La carga total que actúa en las secciones extremas es:

* Para $x = \pm\frac{l}{2}$

$$H = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \pm\left(\frac{l^3}{8}y - ly^3\right)dy = \pm\left[\frac{l^3}{16}y^2 - \frac{l}{4}y^4\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0$$

$$V = 2\int_0^{\frac{h}{2}}\left(-\frac{3l^2}{8}y^2 + \frac{3h^2l^2}{32} + \frac{1}{2}y^4 - \frac{h^4}{32}\right)dy = \frac{l^2h^3}{16} - \frac{h^5}{40}$$



$$\boxed{H = 0 ; \quad V = \frac{l^2h^3}{16} - \frac{h^5}{40}}$$