ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE
INGENIEROS INDUSTRIALES

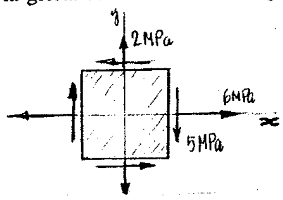
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE
MADRID

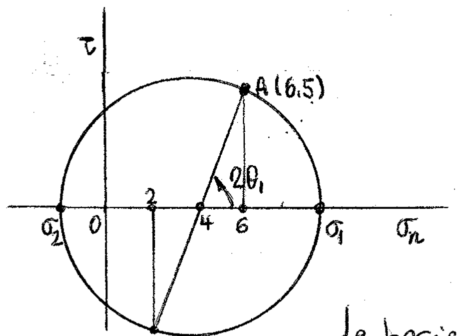
ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES
CONVOCATORIA DE FEBRERO

CURSO 2000-01
27.02.2001

CUESTIONES E

1. Una chapa de un sólido elástico presenta una grieta lineal. Si de la chapa se quiere recortar una placa que va a estar sometida al estado tensional de la figura, determinar cuál sería el ángulo que debería formar la grieta con los lados de la placa para que su posición fuera la menos desfavorable.

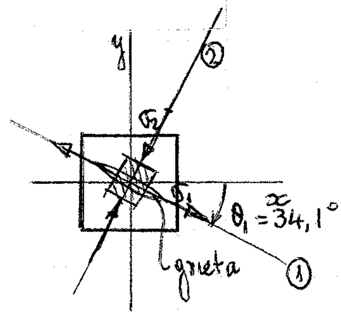




Las direcciones principales son

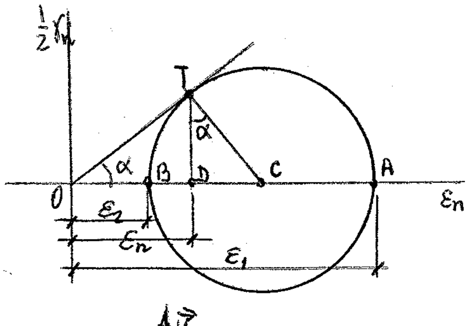
$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$\boxed{\theta_1 = 34{,}10^\circ}$$



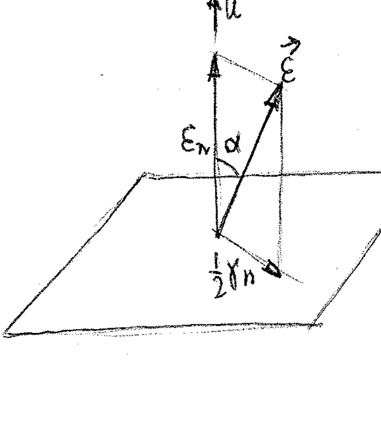
La posición menos desfavorable es cuando la grieta tiene la dirección principal 1 (σ_1 es de tracción) y, por tanto, en dirección perpendicular a la misma está sometida a compresión.

2. Las deformaciones principales de un estado de deformación plana son ε_1 y ε_2, ambas positivas. Se considera la dirección respecto a la cual el vector deformación unitaria forma con ella un ángulo α que es máximo. Calcular para esta dirección la expresión de la deformación longitudinal en función de ε_1, ε_2 y α



El angulo α es máximo cuando el punto representativo en el círculo de Mohr es T. De la figura se deduce: $\varepsilon_n = \overline{OD} = \overline{OC} - \overline{DC}$

es decir: $$\boxed{\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \operatorname{sen} \alpha}$$



En nuestro caso el ángulo α se puede expresar en función de ε_1 y de ε_2

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{TC}}{\overline{OC}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Sustituyendo en la expresión anterior, queda $$\boxed{\varepsilon_n = \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$$

3. Un cuerpo, cuyo módulo de elasticidad es $E = 2 \times 10^5$ MPa, se introduce en un depósito cerrado. Al someter éste a una presión interna de 40 atmósferas, el cuerpo experimenta una disminución unitaria de volumen de 3×10^{-5}.

   Calcular los valores del coeficiente de Poisson μ y del módulo de elasticidad transversal G del cuerpo.

Por las leyes de Hooke: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \dfrac{p(1-2\mu)}{E}$

$$e = 3\varepsilon_x = \frac{3p(1-2\mu)}{E} \Rightarrow 1-2\mu = \frac{Ee}{3p} \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}\left(1-\frac{Ee}{3p}\right)$$

Sustituyendo valores

$$\boxed{\mu} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2\times10^6\times3\times10^{-5}}{3\times40\times1{,}033}\right) = \boxed{0{,}253}$$

$$\boxed{G} = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2\times10^5}{2\,(1+0{,}253)} = \boxed{79{,}8\ \text{GPa}}$$

4. Las componentes de la matriz de tensiones en un sólido elástico sometido a un estado tensional plano son σ_{nx}, σ_{ny} y τ_{xy}.

   Calcular la tensión equivalente del criterio de la energía de distorsión en función de dichas componentes. Se dará la expresión de la tensión equivalente de la forma más simplificada posible.

Las tensiones principales en función de σ_{nx}, σ_{ny} y τ_{xy} son:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{nx}+\sigma_{ny}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{nx}-\sigma_{ny}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Como la tensión equivalente en función de las tensiones principales es

$$\sigma_{equiv} = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2} = \sqrt{(\sigma_1+\sigma_2)^2-3\sigma_1\sigma_2}$$

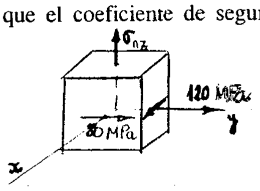
La expresión de la tensión equivalente en el criterio de von Mises, en el sistema tensional plano considerado, será

$$\sigma_{equiv} = \sqrt{(\sigma_{nx}+\sigma_{ny})^2 - 3\left[\left(\frac{\sigma_{nx}+\sigma_{ny}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{nx}-\sigma_{ny}}{2}\right)^2 - \tau_{xy}^2\right]}$$

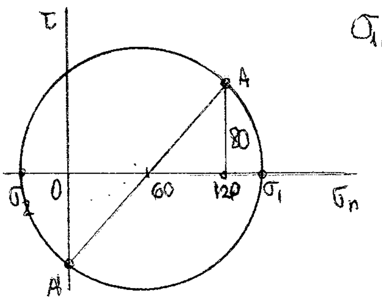
Simplificando, se llega a

$$\boxed{\sigma_{equiv} = \sqrt{\sigma_{nx}^2+\sigma_{ny}^2-\sigma_{nx}\sigma_{ny}+3\tau_{xy}^2}}$$

5. En un punto P de un sólido elástico el estado tensional es el indicado en la figura. Sabiendo que el material es un acero de límite elástico $\sigma_e = 400$ MPa, determinar entre qué valores puede variar σ_{nz} para que el coeficiente de seguridad sea igual o superior a 2, según el criterio de von Mises.



De la observación de la figura se desprende que σ_{nz} es tensión principal, las otras dos son



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{nx}+\sigma_{ny}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{nx}-\sigma_{ny}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} =$$

$$= 60 \pm \sqrt{60^2 + 80^2} = 60 \pm 100$$

$$\sigma_1 = 160 \text{ MPa} \qquad \sigma_2 = -40 \text{ MPa}$$

La expresión de la tensión equivalente en el criterio de von Mises es:

$$\sigma_{equiv} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(160-\sigma_{nz})^2 + (\sigma_{nz}+40)^2 + (160+40)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\sigma_{nz}^2 - 120\,\sigma_{nz} + 33600} \leq \frac{400}{2} = 200 \text{ MPa}$$

De aquí se obtiene

$$\sigma_{nz}^2 - 120\,\sigma_{nz} - 6400 \leq 0$$

$$\sigma_{nz} = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 + 4 \times 6400}}{2} =$$

$$= 60 \pm 100$$

Por consiguiente, la acotación pedida es:

$$\boxed{-40 \text{ MPa} \leq \sigma_{nz} \leq 160 \text{ MPa}}$$