CUESTIONES DE ELASTICIDAD

1.- En un punto de la superficie de un sólido la matriz de tensiones es [T], siendo el vector normal saliente $\vec{u} = (0 \ \ 0 \ \ 1)$. Si la superficie está deslizando sobre la de otro sólido determinar el valor del coeficiente de rozamiento en dicho punto.

$$[T] = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 3 \\ 0 & -50 & 4 \\ 3 & 4 & -25 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

La fuerza de superficie será $[f_s] = [T][u] = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 3 \\ 0 & -50 & 4 \\ 3 & 4 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -25 \end{pmatrix}$ MPa

y sus componentes normal y tangencial:

$$\begin{cases} f_{sn} = \vec{f_s} \cdot \vec{n} = -25 \text{ MPa} \\ |f_{st}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad '' \end{cases}$$

de donde $\nu = \dfrac{|f_{st}|}{|f_{sn}|} = \dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5}$

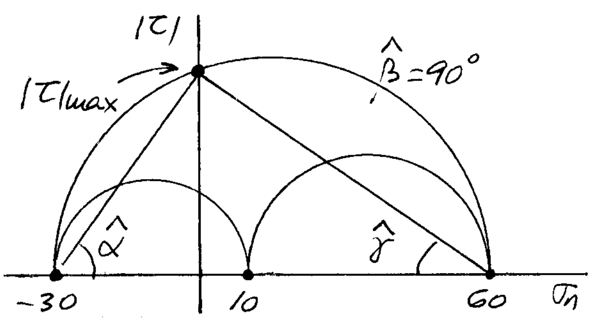
2.- El estado tensional en un punto viene dado por la matriz de tensiones [T]. Determinar la orientación respecto a las direcciones principales del plano cuyo vector tensión sólo tiene componente tangencial y ésta es máxima.

$$[T] = \begin{pmatrix} 20 & 20 & -40 \\ 20 & 10 & 0 \\ -40 & 0 & 10 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Las tensiones principales son:

$$\begin{vmatrix} 20-\sigma & 20 & -40 \\ 20 & 10-\sigma & 0 \\ -40 & 0 & 10-\sigma \end{vmatrix} = 0 = (10-\sigma)\left[(20-\sigma)(10-\sigma) - 40^2 - 20^2\right]$$

$\sigma_1 = 60$; $\sigma_2 = 10$; $\sigma_3 = -30$ MPa

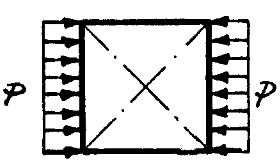


De los círculos de Mohr se obtiene:

$\hat{\alpha} = \pm 55°$; $\hat{\beta} = 90°$; $\hat{\gamma} = \pm 35°$

3.- Determinar la presión *p* que hay que aplicar en dos lados opuestos de una placa cuadrada para que cuando se produzca un salto térmico uniforme *T*, las diagonales no cambien de longitud.

Datos: E, μ, α.



– Debido al salto térmico *T*, la deformación longitudinal unitaria en la dirección de la diagonal será $\varepsilon_T = \alpha T$

– Debido a la presión tendremos:

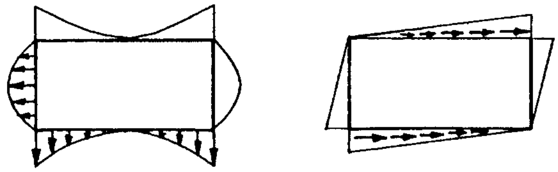
$$\begin{cases} \sigma_{nx} = -p \\ \sigma_{ny} = \tau_{xy} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_{nx} - \mu \sigma_{ny}) = -\frac{p}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_{ny} - \mu \sigma_{nx}) = \mu \frac{p}{E} \end{cases} \qquad \gamma_{xy} = 0$$

de donde $\varepsilon_p = [u]^T[D][u] = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)\cdot\frac{P}{E}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = -\frac{P}{2E}(1-\mu)$

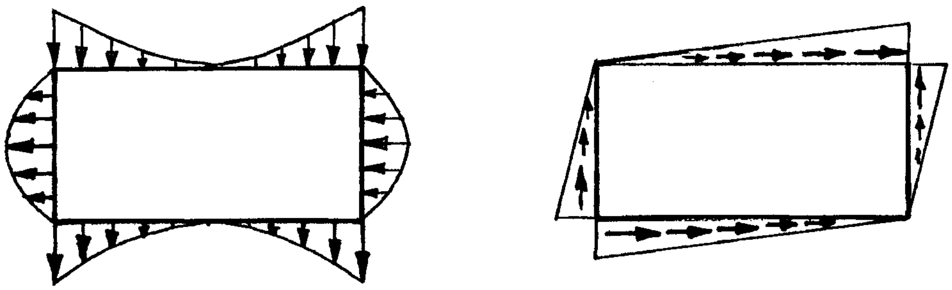
Para que no cambie la longitud $\varepsilon_T + \varepsilon_p = 0$

$$\alpha T - \frac{P}{2E}(1-\mu) = 0 \qquad P = \frac{2E\alpha T}{1-\mu}$$

4.- Una placa rectangular está en equilibrio bajo la acción del sistema de fuerzas normales y tangenciales representado a escala en los diagramas, siendo nulas las fuerzas de volumen. Determinar el sentido de las fuerzas en los lados en que no está indicado.

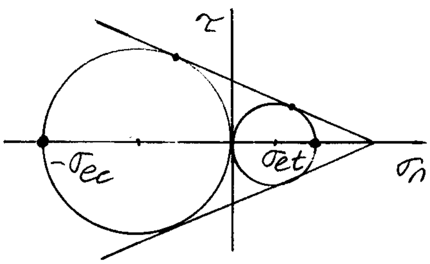


- Por la ley de reciprocidad de las tensiones tangenciales, aplicada a las esquinas, se obtiene el sentido de las fuerzas tangenciales.
- Por el equilibrio de la placa: $\sum F_H = 0$; $\sum F_V = 0$; $\sum M = 0$, se obtiene el de las fuerzas normales.



5.- La curva intrínseca de un determinado material se reduce a la pareja de rectas que tienen por ecuación $\tau = \pm\sqrt{15}\cdot(25 - \frac{\sigma_n}{15})$, cuando σ_n y τ se expresan en MPa. Calcular los valores de los límites elásticos del material a tracción y a compresión.

Las circunferencias límite correspondientes a los ensayos de tracción ó compresión, tienen como ecuación:



$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_e}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_e}{2}\right)^2$$

$$\sigma_n^2 - \sigma_e\sigma_n + \tau^2 = 0$$

Imponiendo la condición de tangencia (raíz doble) con la pareja de rectas

$$\sigma_n^2 - \sigma_e\sigma_n + 15\left(25 - \frac{\sigma_n}{15}\right)^2 = 0 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{15}\right)\sigma_n^2 - (\sigma_e + 50)\sigma_n + 15\cdot 25^2 = 0$$

$$(\sigma_e + 50)^2 = 4\cdot\left(1 + \frac{1}{15}\right)\cdot 15\cdot 25^2 \qquad \sigma_e = \begin{cases} 200 - 50 = 150 \text{ MPa} = \sigma_{et} \\ -200 - 50 = -250 \text{ ''} = \sigma_{ec}\end{cases}$$