ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE
INGENIEROS INDUSTRIALES

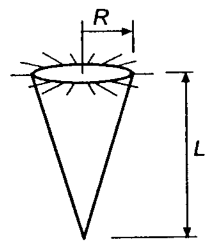
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE
MADRID

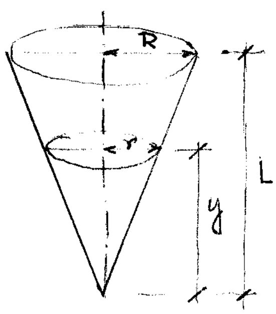
ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES **CURSO 2000-2001**

EXAMEN DE SEPTIEMBRE **10-9-2001**

CUESTIONES DE RESISTENCIA

1.- Un sólido elástico de forma cónica tiene: radio de la base R; longitud L; peso específico γ ; y módulo de elasticidad E. El cono está empotrado por su base y tiene su eje vertical, como se indica en la figura. Calcular el desplazamiento del vértice debido al propio peso.





En la sección de cota y existe un esfuerzo normal

$$N = \frac{\gamma}{3} \pi r^2 y = \frac{\gamma}{3} \frac{\pi R^2}{L^2} y^3$$

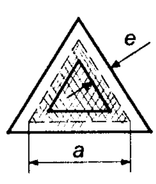
Como el area de la sección recta de cota y es

$$\Omega(y) = \pi r^2 = \pi \frac{R^2}{L^2} y^2$$

el desplazamiento pedido será

$$\boxed{\delta} = \int_0^L \frac{N}{E\Omega} dy = \int_0^L \frac{\gamma}{3} \frac{\pi R^2}{L^2} y^3 \frac{1}{E \frac{\pi R^2}{L^2} y^2} dy = \int_0^L \frac{\gamma}{3E} y\, dy = \boxed{\frac{\gamma L^2}{6E}}$$

2.- La línea media de la sección recta de un tubo de paredes delgadas, de longitud L = 2m y espesor e = 4 mm es un triángulo equilátero de lado a = 250 mm. El módulo de elasticidad transversal del material del tubo es G = 75 GPa. Calcular el par torsor máximo que se puede aplicar al tubo si la tensión admisible a cortadura es τ_{adm} = 90 MPa, y el ángulo de torsión máximo es de ϕ = 2,55 x10^{-3} rad.



De la fórmula de Bredt $\tau = \frac{M_T}{2\Omega^* e}$, siendo Ω^* el area encerrada por la línea media de la sección recta del perfil, se deduce el valor del momento torsor que produce en el tubo la tensión admisible a cortadura

$$\underline{M_{T\,máx}} = \tau_{adm} \cdot 2\,\Omega^* e = 90 \times 10^6 \times 2 \times \left(\frac{1}{2}\, 250 \times 250 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) 10^{-6} \times 4 \times 10^{-3} =$$

$$= \underline{19\,485 \text{ m.N}}$$

De la expresión del ángulo de torsión

$$\phi = \frac{M_T L}{4G\Omega^{*2}} \int_\gamma \frac{ds}{e}$$

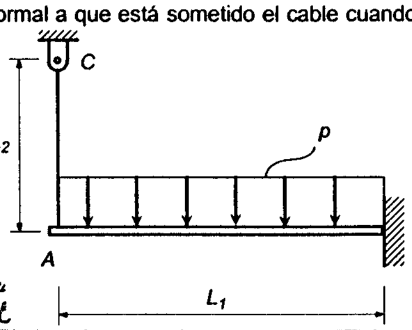
se deduce el valor del momento torsor que produce en el tubo el ángulo de torsión máximo.

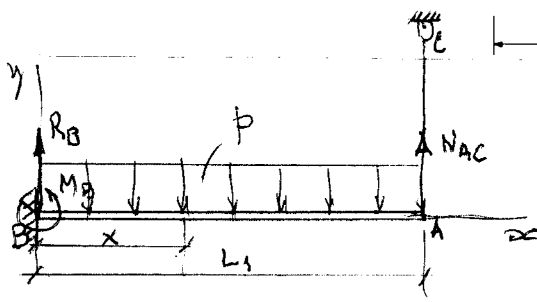
$$0{,}00255 = \frac{M_{Tmax} \times 2}{4 \times 75 \times 10^9 \times (27062{,}5)^2 \times 10^{-12}} \int_\gamma \frac{ds}{0{,}004} = \frac{M_{Tmáx} \times 2 \times 750 \times 10^{-3}}{300 \times 10^9 \times 27062{,}5^2 \times 10^{-12} \times 4 \times 10^{-3}}$$

$$\Rightarrow \underline{M_{Tmáx} = 1494 \ m.N}$$

El valor pedido es el mas restrictivo $\boxed{M_{Tmáx} = 1494 \ m.N}$

3.- La viga AB indicada en la figura, de longitud L_1 y rigidez constante $E_1 \cdot I_1$, tiene su extremo B empotrado y el A unido a un cable de longitud L_2, módulo de elasticidad E_2 y área de la sección recta Ω_2. Cuando la viga está descargada, la tensión en el cable es nula. Calcular el esfuerzo normal a que está sometido el cable cuando se aplica a la viga una carga lineal uniforme p.





El sistema considerado es hiperestático de 1^er grado. Las ecuaciones de la estática son:

$$\begin{cases} R_B + N_{AC} = pL_1 \\ N_{AC} \cdot L_1 + M_B = p\dfrac{L_1^2}{2} \end{cases}$$

La ecuación complementaria se puede obtener aplicando la ecuación universal

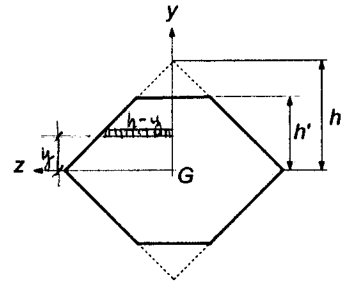
$$E_1 I_1 y = R_B \frac{x^3}{6} - M_B \frac{x^2}{2} - p\frac{x^4}{24} \Rightarrow$$

$$E_1 I_1 \delta = (pL_1 - N_{AC})\frac{L_1^3}{6} - \left(p\frac{L_1^2}{2} - N_{AC} L_1\right)\frac{L_1^2}{2} - p\frac{L_1^4}{24}$$

Despejando de esta ecuación N_{AC} y sustituyendo δ por su expresión en función de N_{AC}, se obtiene

$$\delta = \frac{N_{AC}}{E_2\Omega_2} L_2 \qquad \boxed{N_{AC} = \frac{3\Omega_2 E_2 p L_1^4}{8(\Omega_2 E_2 L_1^3 + 3E_1 I_1 L_2)}}$$

4.- Se considera una viga de madera de sección cuadrada, situada en la forma indicada en la figura. Calcular la altura h' que determina el corte que hay que realizar para que la viga sea de máxima resistencia a la flexión, cuando sobre la viga actúa un momento M_z



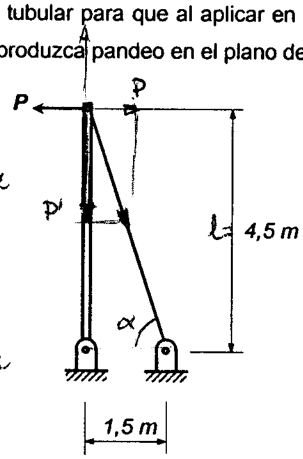
De la fórmula de Navier $\sigma_{máx} = \frac{M_z}{W_z}$ se deduce que la sección será de máxima resistencia a la flexión cuando es máximo el módulo resistente.

$$W_z = \frac{I_z}{h'} \quad ; \quad I_z = 4\int_0^{h'} (h-y)y^2\,dy = 4\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{h'} = 4h'^3\left(\frac{h}{3} - \frac{h'}{4}\right); \quad W_z = 4h'^2\left(\frac{h}{3} - \frac{h'}{4}\right)$$

$$\frac{dW_z}{dh'} = 4\left[2h'\left(\frac{h}{3} - \frac{h'}{4}\right) - \frac{h'^2}{4}\right] = 0$$ cuyas soluciones son:

$h' = 0$ (solución no válida) y $\boxed{h' = \frac{8}{9}h}$

5.- Un soporte tubular de acero (E = 200 GPa), de diámetro exterior D_2 = 5 cm, tiene su extremo inferior articulado y el superior unido, mediante un pasador que hace de articulación, a un tirante de alambre de acero, como se indica en la figura. Calcular el espesor mínimo del soporte tubular para que al aplicar en el extremo superior una carga horizontal P = 600 kp no se produzca pandeo en el plano de la figura.



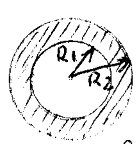
La carga que actúa sobre el soporte

$P' = P \operatorname{tg}\alpha = 3P$

tiene que ser menor que la carga crítica

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_z}{l^2} = \frac{\pi^2 \times 200\times10^9 \times I_z}{4{,}5^2} > 3\times600\times9{,}8 = 17640\ N$$

De esta expresión se obtiene el valor de I_z



$$I_z > \frac{17640 \times 4{,}5^2}{\pi^2 \times 200\times10^9} = 1{,}8096\times10^{-7}\ m^4 = 18{,}096\ cm^4$$

Como $I_z = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{4} = \frac{\pi(2{,}5^4 - R_1^4)}{4} = 18{,}096$

$2{,}5^4 - R_1^4 = 23{,}040\ cm^4 \Rightarrow R_1^4 = 16{,}022\ cm^4 \Rightarrow R_1 = 2\ cm$

Por consiguiente, el espesor mínimo pedido será $\boxed{e_{mín} = R_2 - R_1 = 5\ mm}$