ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES. CURSO 2000-2001
EXAMEN FINAL DE JUNIO. 11-JUNIO-2001

SOLUCION DE LAS CUESTIONES DEL PRIMER PARCIAL

1.

$$T = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma(h-z) \end{bmatrix}$$

- Entrando en las leyes de Hooke generalizadas se obtiene:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(p(\mu-1) + \mu\gamma(h-z)\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(-\gamma(h-z) + 2\mu p\right)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- Sustituyendo en las expresiones de las diferenciales totales de las componentes del vector giro se obtiene:

$$d\rho_x = \frac{\mu}{E}\gamma\, dy \qquad d\rho_y = \frac{-\mu}{E}\gamma\, dx$$

Integrando: $\rho_x = \frac{\mu}{E}\gamma y + \rho_{x_0}$; $\rho_y = \frac{-\mu}{E}\gamma x + \rho_{y_0}$

Si el giro en el origen es nulo $\rightarrow$ $\rho_{x_0} = \rho_{y_0} = 0$

- Entrando en la expresión de la diferencial total de la tercera componente del vector desplazamiento se obtiene:

$$dw = \frac{\mu}{E}\gamma x\, dx + \frac{\mu}{E}\gamma y\, dy + \frac{1}{E}\left(\gamma(z-h) + 2\mu p\right) dz$$

Integrando: $w = \frac{\mu\gamma}{2E}(x^2+y^2) + \frac{\gamma}{2E}z^2 + (2\mu p - \gamma h)\frac{z}{E} + w_0$

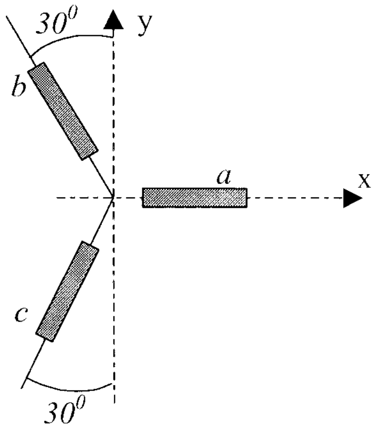
Si el desplazamiento en el origen es nulo $\rightarrow$ $w_0 = 0$

- Condición de nulidad del desplazamiento vertical de los puntos de la base superior:

$w(x,y,h) = 0$, sustituyendo y teniendo en cuenta que $x^2+y^2=R^2$

se despeja: $\boxed{p = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{h}{2\mu} - \frac{R^2}{h}\right)}$

2.



$E = 2\cdot 10^5\ MPa \qquad \mu = 0{,}3$

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{15}{13}\cdot 10^5\ MPa$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{10}{13}\cdot 10^5\ MPa$$

$\varepsilon_a = 23\cdot 10^{-4} \qquad \varepsilon_b = 14{,}5\cdot 10^{-4} \qquad \varepsilon_c = 10{,}3\cdot 10^{-4}$

$$\varepsilon_M = \varepsilon_x \alpha^2 + \varepsilon_y \beta^2 + \varepsilon_z \gamma^2 + \gamma_{xy}\alpha\beta + \gamma_{xz}\alpha\gamma + \gamma_{yz}\beta\gamma$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_a\ (1,0,0) \longrightarrow \varepsilon_a = \varepsilon_x = 23\cdot 10^{-4} \\ \vec{u}_b\ (-1/2, \sqrt{3}/2, 0) \longrightarrow \varepsilon_b = \varepsilon_x\cdot 1/4 + \varepsilon_y\cdot 3/4 - \gamma_{xy}\sqrt{3}/4 \\ \vec{u}_c\ (-1/2, -\sqrt{3}/2, 0) \longrightarrow \varepsilon_c = \varepsilon_x\cdot 1/4 + \varepsilon_y\cdot 3/4 + \gamma_{xy}\sqrt{3}/4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \varepsilon_x = 23\cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_y = 8{,}86\cdot 10^{-4} \\ \gamma_{xy} = -4{,}85\cdot 10^{-4} \end{array}$$

- Para la orientación según Z se tiene una presión de 15 MPa, luego:

$$\sigma_{Mz} = -15\ MPa = \lambda e + 2G\varepsilon_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + (\lambda + 2G)\varepsilon_z$$

Despejando ε_z y sustituyendo se obtiene: $\varepsilon_z = -14{,}21\cdot 10^{-4}$

y, dado que la dirección Z es principal: $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

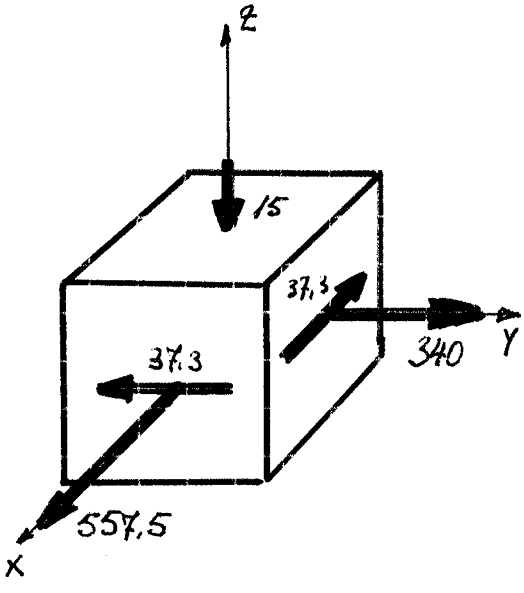
- Entrando en las ecuaciones de Lamé:

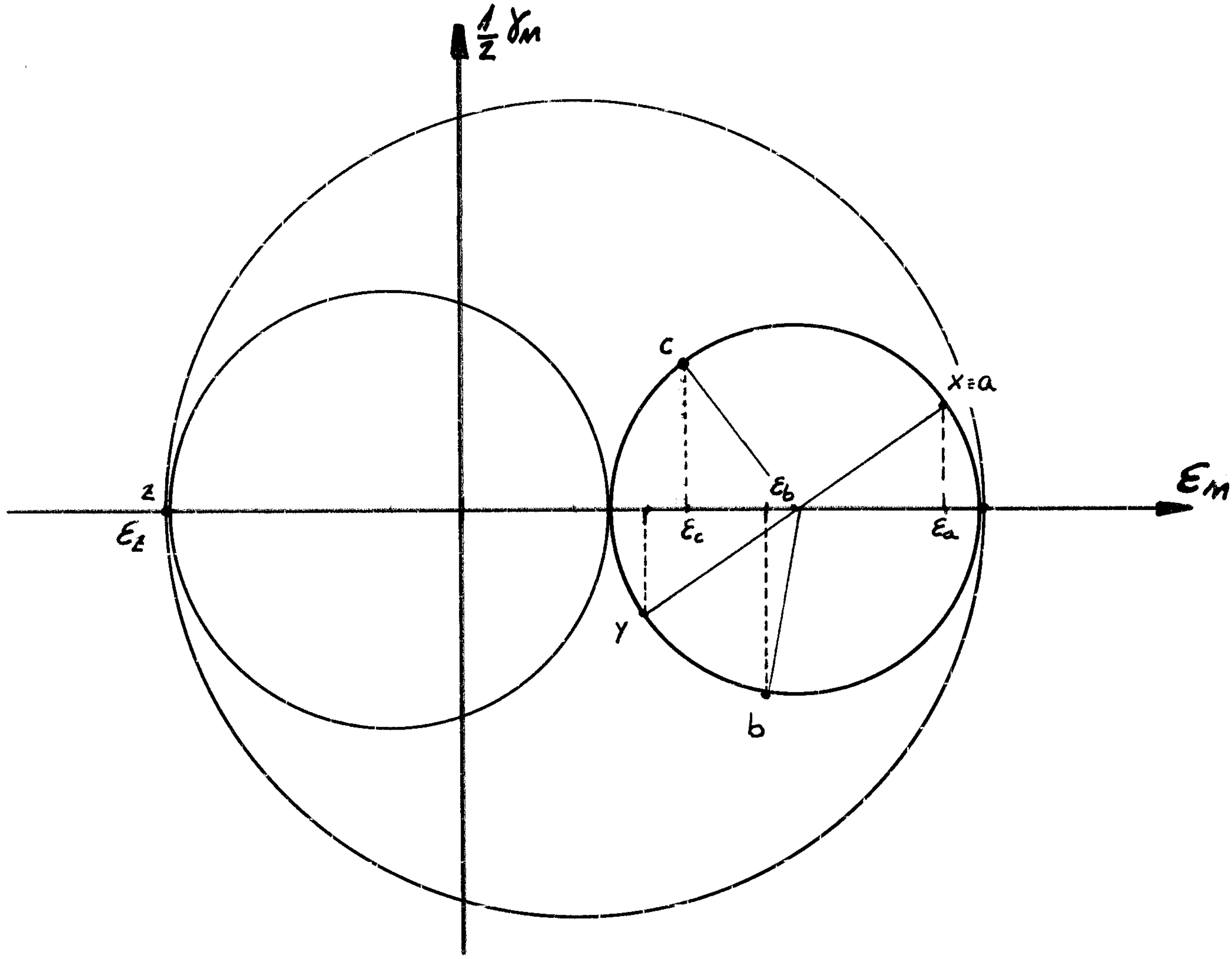
$$\sigma_{Mx} = \lambda e + 2G\varepsilon_x = 557{,}5\ MPa$$

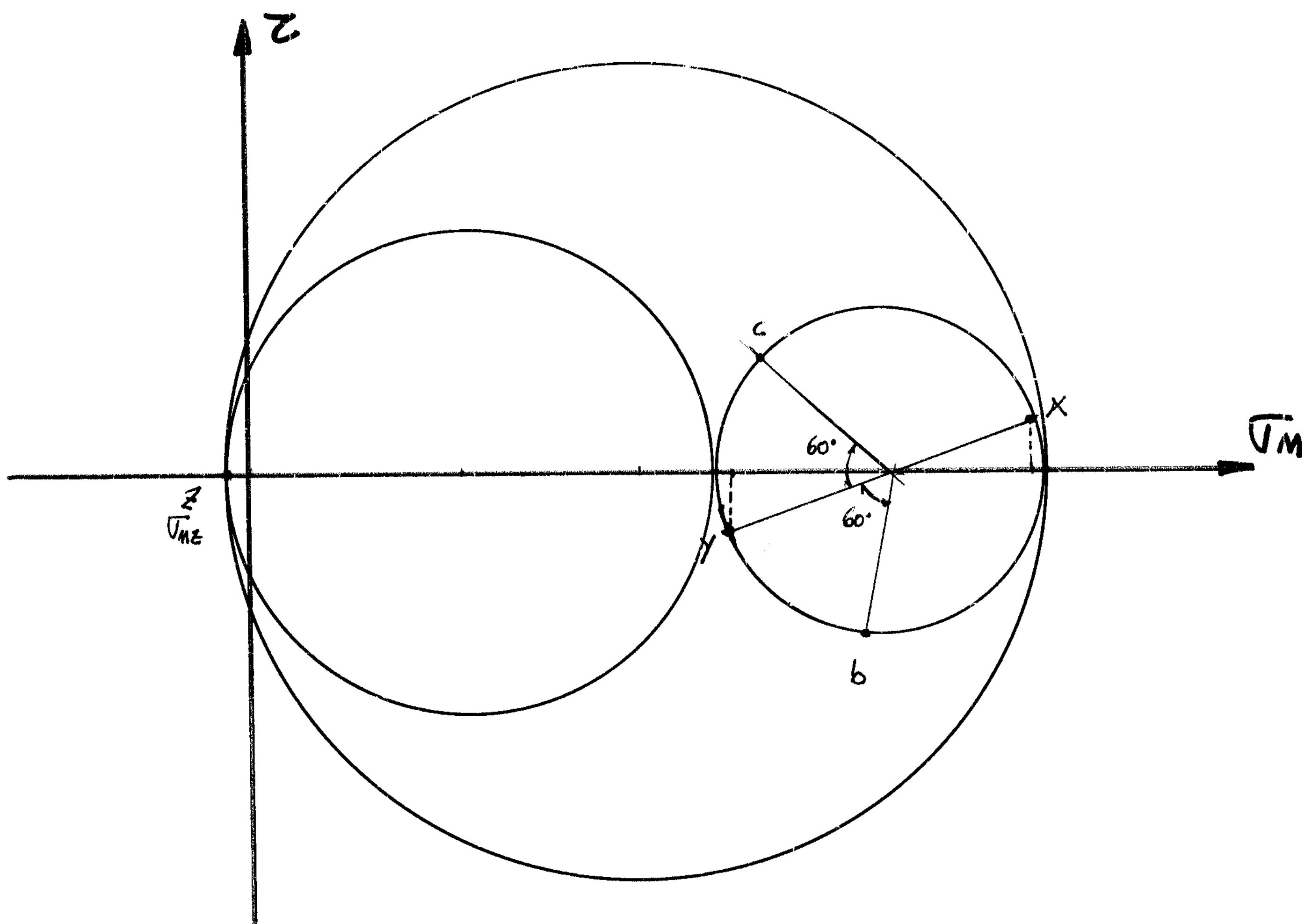
$$\sigma_{My} = \lambda e + 2G\varepsilon_y = 340\ MPa$$

$$\sigma_{Mz} = -15\ MPa$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy}\, G = -37{,}3\ MPa$$




$\frac{1}{2}\gamma_M$
ε_M
z
ε_z
c
x≡a
ε_b
ε_c
ε_a
y
b


τ
σ_M
c
x
60°
60°
z
σ_{Mz}
y
b

3. Función de Airy: $\phi = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2$

Solución de tensiones:
$$\sigma_{nx} = \partial^2\phi/\partial y^2 = 2Cx + 6Dy + 2G$$
$$\sigma_{ny} = \partial^2\phi/\partial x^2 = 6Ax + 2By + 2E$$
$$\tau_{xy} = -\partial^2\phi/\partial x\partial y = -2Bx - 2Cy - F$$

Condiciones de contorno:

Lado OA ($y=0$) $\rightarrow$ $\sigma_n = \sigma_{ny} = 6x = 6Ax + 2E \rightarrow A = 1;\ E = 0$
$\tau = \tau_{xy} = -5 = -2Bx - F \rightarrow B = 0;\ F = 5$

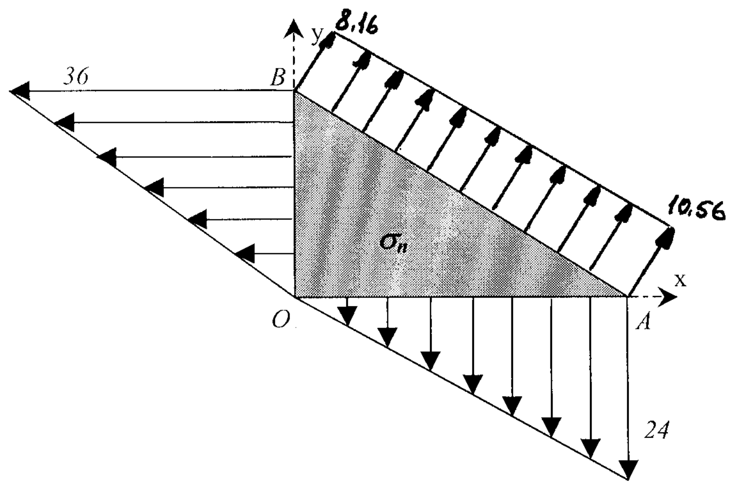
Lado OB ($x=0$) $\rightarrow$ $\sigma_n = \sigma_{nx} = 12y = 6Dy + 2G \rightarrow D = 2;\ G = 0$
$\tau = -\tau_{xy} = 5 = 2Cy + F \rightarrow C = 0;\ F = 5$

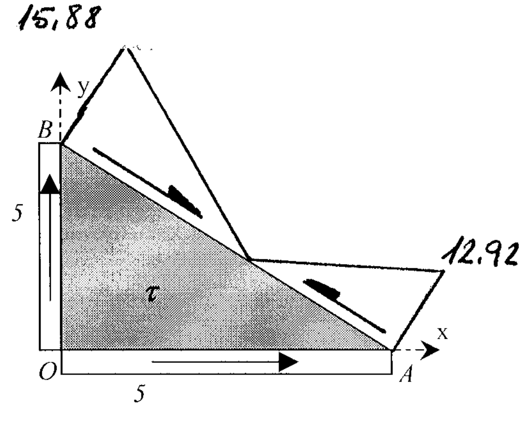
Y la función de Airy queda: $\boxed{\phi = x^3 + 2y^3 + 5xy}$ $\longrightarrow$ $\sigma_{nx} = 12y$, $\sigma_{ny} = 6x$, $\tau_{xy} = -5$

Borde AB, $\vec{u}\,(0{,}6\ ;\ 0{,}8)$, $\theta = \operatorname{arctg} 4/3 = 53{,}13°$

Punto A(4,0) $\rightarrow$ $\sigma_{nx} = 0$, $\sigma_{ny} = 24$, $\tau_{xy} = -5$
$$\sigma_n = \frac{\sigma_{nx}+\sigma_{ny}}{2} + \frac{\sigma_{nx}-\sigma_{ny}}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\, 2\theta = 10{,}56$$
$$\tau = \frac{\sigma_{nx}-\sigma_{ny}}{2}\,\text{sen}\, 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta = -12{,}92$$

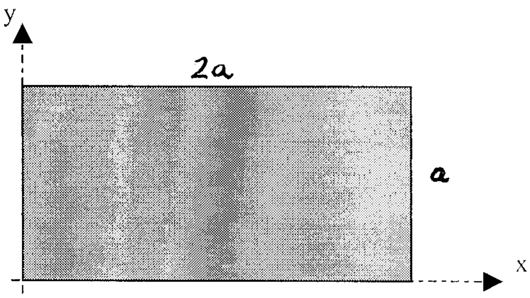
Punto B(0,3) $\rightarrow$ $\sigma_{nx} = 36$, $\sigma_{ny} = 0$, $\tau_{xy} = -5$ $\quad \sigma_n = 8{,}16 \qquad \tau = 15{,}88$





. Tensiones en *MPa*
. Coordenadas en *m*: *A(4,0)* *B(0,3)* *O(0,0)*

4.



$u = K(x^2 - y^2) \quad v = 2Kxy \quad (K = 10^{-6}/\text{mm})$

· Deformaciones:

$\varepsilon_x = \partial u/\partial x = 2Kx$

$\varepsilon_y = \partial v/\partial y = 2Kx$

$\gamma_{xy} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x = 0$

por ser un estado de tensión plana. $\sigma_{nz} = 0 \rightarrow \varepsilon_z = \dfrac{-\lambda}{2G+\lambda}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \dfrac{-\lambda}{2G+\lambda} 4Kx$

- Entrando en las ecuaciones de Lamé se obtienen las tensiones:

$$\sigma_{nx} = \sigma_{ny} = 4Kx\left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2G+\lambda} + G\right) \quad ; \quad \sigma_{nz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

al ser $0 \leq x \leq 2a$; $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{nx} = \sigma_{ny}$ y $\sigma_3 = \sigma_{nz} = 0$

- Los puntos de mayor riesgo de plastificación son los del borde $x = 2a$.

En el límite, $M = 1$, luego, según el criterio de Tresca:

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = 4K \cdot 2a\left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2G+\lambda} + G\right)$$

siendo $\sigma_e = 275$ MPa, $K = 10^{-6}/\text{mm}$, $E = 70.000$ MPa, $\mu = 0{,}3$

$\lambda = \mu E/(1+\mu)(1-2\mu) = 40384{,}6$ MPa, $G = E/2(1+\mu) = 26.923$ MPa

se obtiene: $275 \text{ MPa} = 4 \cdot 10^{-6}/\text{mm} \cdot 2a\,(40384{,}6 - 50000 + 26923)$ MPa

de donde se despeja: $a = 687{,}5$ mm

luego, el máximo número entero de mm es $\boxed{a = 687 \text{ mm}}$