CUESTIONES

1.- Solo es preciso analizar la mitad izquierda de la estructura, ya que ésta es simétrica de forma y cargas (Las reacciones tienen valor P, son verticales y hacia arriba).

Las barras AB, BD, HJ e IJ no trabajan, ya que si alguna de ellas lo hiciera no habría equilibrio (de fuerzas) en los nudos B y J.

La barra EF tampoco debe trabajar, para que exista equilibrio en E.

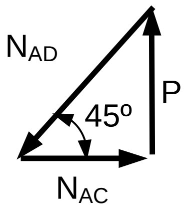
Como EF no trabaja y por la simetría $N_{CF} = N_{FG}$, si CF y FG trabajasen, no estaría compensada la componente vertical de las fuerzas en el nudo F: CF y FG tampoco trabajan.

Por equilibrio en el nudo C, la barra CD está traccionada con un esfuerzo P. (1 punto)

Solo quedan por calcular los esfuerzos en AC, AD y DF, que se determinan imponiendo equilibrio en los nudos A y D sucesivamente:

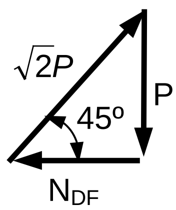
Nudo A:

$$N_{AD} = \sqrt{2}\,P$$
$$N_{AC} = P$$

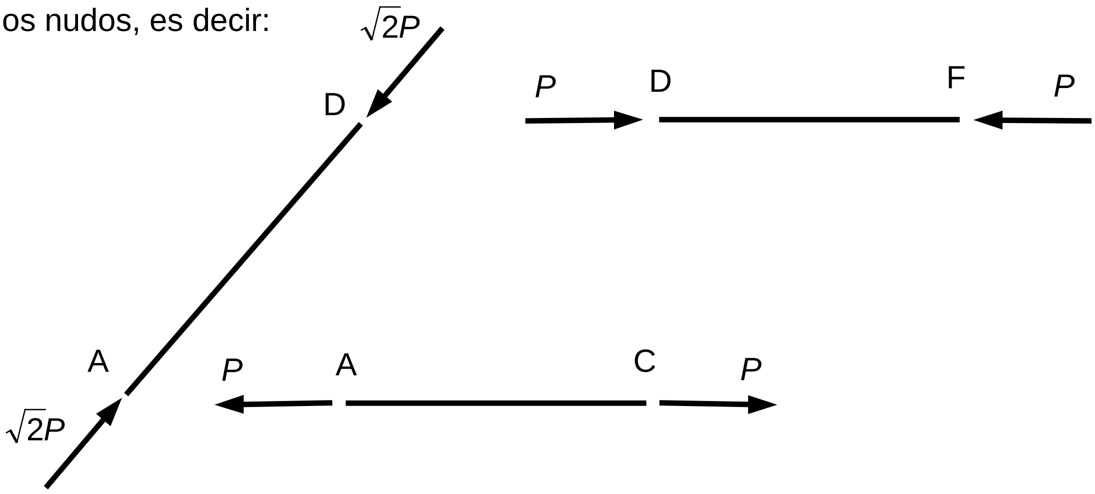


Nudo D:

$$N_{DF} = P$$



Las acciones sobre las barras son iguales y de sentido contrario a las dibujadas sobre los nudos, es decir:



Los esfuerzos en todas las barras son:

$$N_{AD} = N_{HI} = \sqrt{2}\,P \ \ (compresión) \quad ; \quad N_{AC} = N_{CE} = N_{EG} = N_{GI} = N_{CD} = N_{GH} = P \ \ (tracción)$$
$$N_{DF} = N_{FH} = P \ \ (compresión)$$

El resto de barras no trabajan. (1 punto)

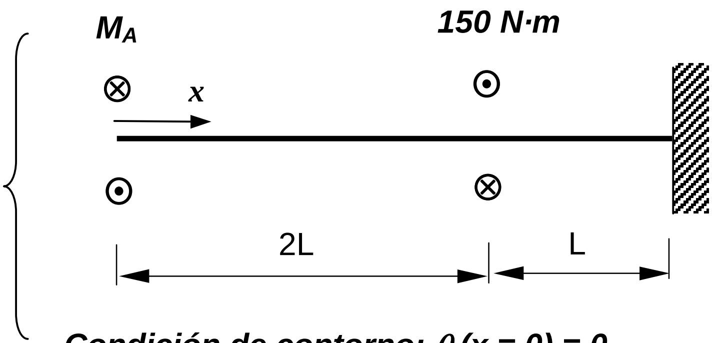
A idénticos resultados se llega aplicando equilibrio nudo a nudo o dando cortes.

2.- El perfil IPE del enunciado se puede considerar como un perfil delgado abierto ramificado. La tensión tangencial máxima en cada tramo de espesor constante del perfil se da en la sección sometida al momento torsor máximo y tiene por valor $\tau_{máx} = \dfrac{3\left|M_{Tmáx}\right|}{\sum_i s_i \cdot e_i^3} e_i$, siendo s_i la longitud de la línea media del tramo de espesor e_i. El sumatorio está extendido al número total de tramos.

A la vista de la expresión, la tensión tangencial máxima absoluta se dará en el tramo de espesor máximo y valdrá $\tau_{máx} = \dfrac{3\left|M_{Tmáx}\right|}{\sum_i s_i \cdot e_i^3} e_{máx}$.

Es necesario conocer el momento torsor máximo, para lo cual hay que obtener el diagrama de momentos torsores de la barra hiperestática del enunciado.

Empleando el método de las fuerzas, la barra equivale a:



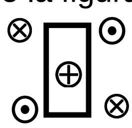
Condición de contorno: θ (x = 0) = 0

La condición de compatibilidad geométrica se expresa como $\theta\,(x = 3L) - \theta\,(x = 0) = 0$, siendo θ el ángulo de torsión.

Según la teoría de la torsión, $\theta\,(x) - \theta\,(x_0) = \int_{x_0}^{x} \dfrac{M_T\,(x)}{K_T\,(x)}\,dx$, siendo K_T la rigidez a torsión, que para el caso de perfiles delgados abiertos es $K_T = \dfrac{G \sum_i s_i e_i^3}{3}$.

La ley de momentos torsores (para el criterio de signos de la figura) es:

$$\begin{cases} M_A & 0 < x < 2L \\ M_A - 150 & 2L < x < 3L \end{cases}$$

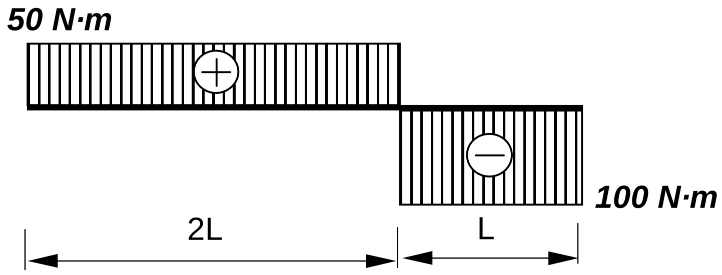


Separando la integral en dos tramos, se tiene:

$$\frac{M_A}{K_T} \cdot 2L + \frac{M_A - 150}{K_T} \cdot L = 0$$

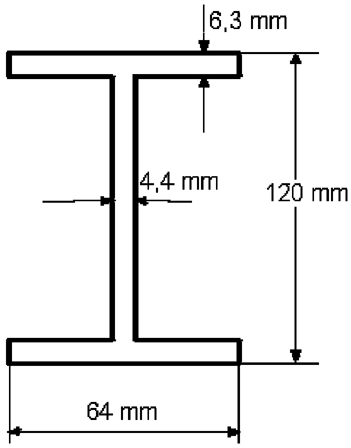
De donde M_A = 50 N·m.

El diagrama de momentos torsores es:



(1 punto)

El perfil IPE 120 tiene por dimensiones las de la figura.



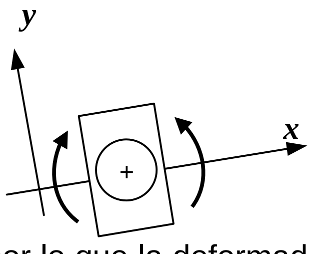
Sustituyendo valores:

$$\sum_i s_i e_i^3 = 2 \cdot 64 \cdot 6{,}3^3 + (120 - 6{,}3) \cdot 4{,}4^3 = 41691\, mm^4$$

La tensión tangencial máxima se da en las alas del IPE de las secciones situadas en 2L < x < 3L, y vale:

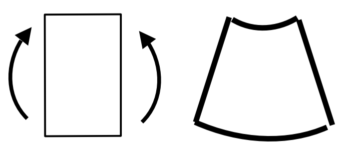
$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 10^3 (N{\cdot}mm)}{41691 (mm^2)} \cdot 6{,}3\,(mm) = 45 \left(\frac{N}{mm^2} \equiv MPa \right)$$ (1 punto)

3.- Para la obtención de la deformada a estima, se utiliza la expresión de la ecuación diferencial de la elástica que para el criterio de signos de la figura es $EI_z \cdot v'' = M_z$.

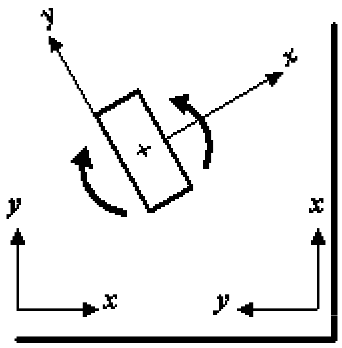


Al ser EI_z positivo, el signo de v'' es el mismo que el de M_z, por lo que la deformada será convexa (tomando como punto de vista el -∞ del eje *y* local), si M_z es positivo y cóncava en caso contrario. Los ángulos en los nudos se mantienen inalterados tras la deformación.

Este razonamiento equivale a decir que cuando el momento flector es como en la figura, las secciones giran congruentemente.



Se van a emplear las referencias locales de la figura y el criterio de signos anterior.

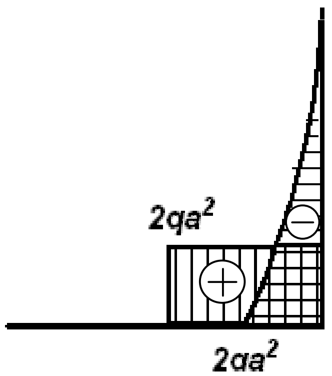


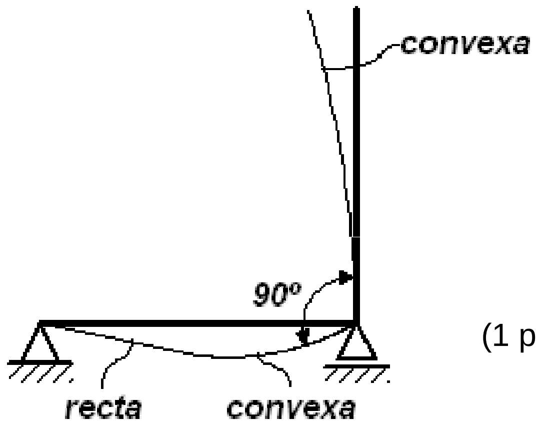
Para determinar el diagrama de momentos flectores es necesaria, como mínimo, la reacción vertical en el apoyo B. Suponiendo V_B hacia arriba y aplicando equilibrio de momentos alrededor de un eje perpendicular al plano del papel y que pase por A, se tiene que:

$$M_{(A)} = 0 \quad \rightarrow \quad 2qa^2 - V_B \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0 \quad \rightarrow \quad V_B = 0$$

El diagrama de momento flector M_0 y la deformada a estima resultantes son:

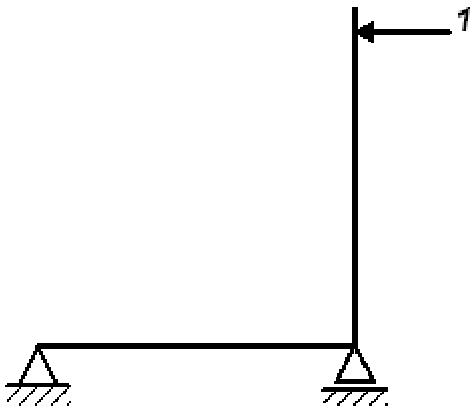
M_0



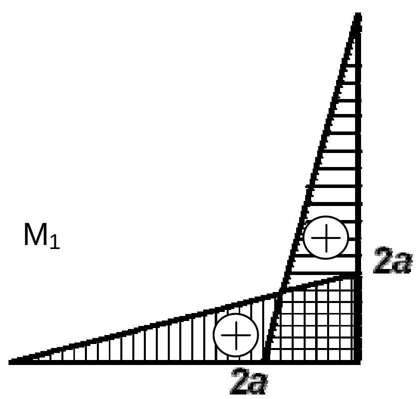


(1 punto)

Para determinar el desplazamiento horizontal del punto C se emplea el método de la carga unitaria, con el sistema virtual de la figura. No es necesario calcular reacciones para determinar el diagrama de momento flector M_1.



M_1



El desplazamiento es $\delta_1 = \int_0^{\text{Long. estructura}} \frac{M_0 M_1}{EI_z}\,dx = \int_0^{\text{2L(barra vertical)}} \frac{M_0 M_1}{2EI}\,dx + \int_0^{\text{2L(barra horizontal)}} \frac{M_0 M_1}{EI}\,dx$

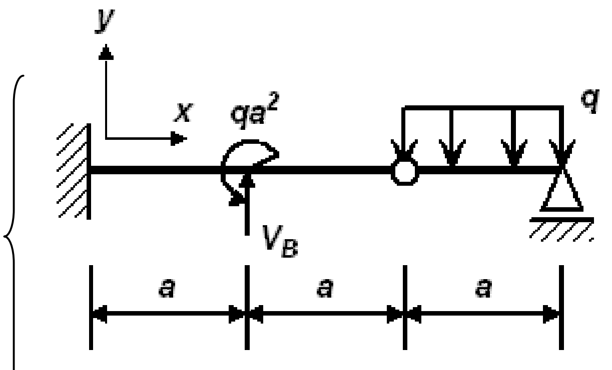
Las integrales se calculan por el método de multiplicación de gráficos:

$$\delta_1 = \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{3}\cdot 2qa^2 \cdot 2a \cdot \frac{3}{4}\cdot 2a\right) + \frac{1}{EI}\left(2qa^2 \cdot a \cdot \frac{3}{4}\cdot 2a\right) = \frac{4qa^4}{EI}$$

El movimiento va en el sentido de la carga unidad, por ser positivo el resultado.

(1 punto)

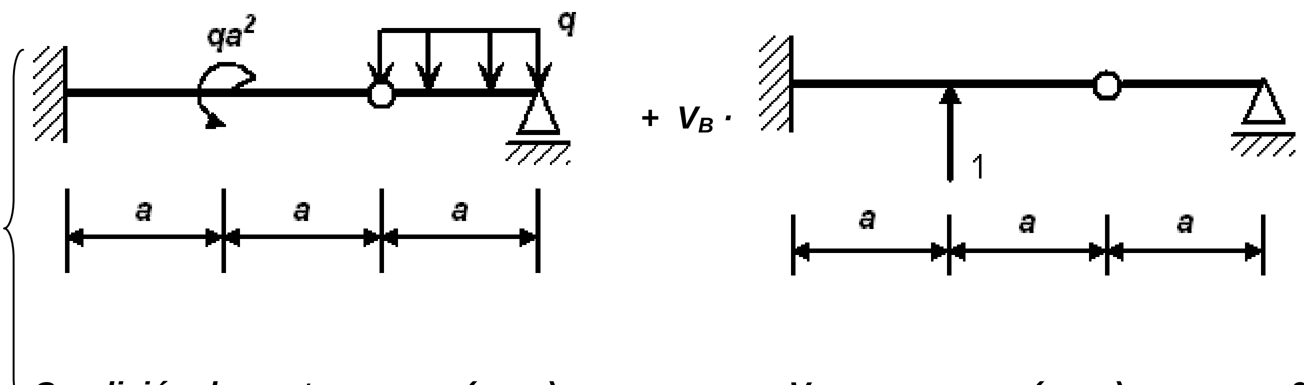
4.- La viga es hiperestática de grado 1. Empleando el método de las fuerzas, la viga equivale a:



Condición de contorno: v (x = a) = 0

Para determinar la reacción V_B es necesario calcular el desplazamiento vertical en x =a (con alguno de los métodos conocidos) e imponer que sea nulo.

Si se descompone la viga en dos, se simplifica el cálculo:



Condición de contorno: $v_{[0]}$ (x = a) + V_B · $v_{[1]}$ (x = a) = 0

Si se emplea el método de la carga unitaria para el cálculo de los desplazamientos, éstos son:

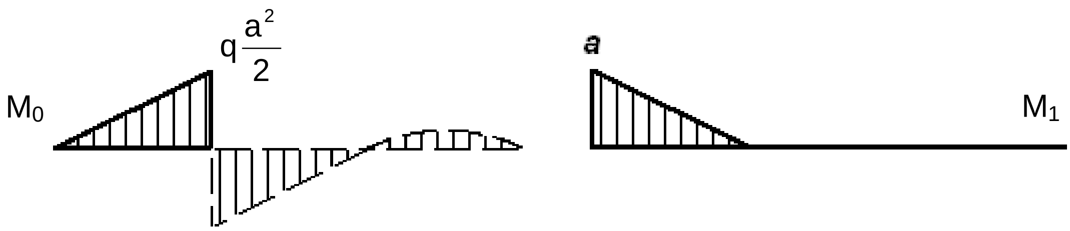
$$v_{[0]}(x = a) \equiv \delta_{1P} = \int_0^{3a} \frac{M_0 M_1}{EI}\,dx \qquad v_{[1]}(x = a) \equiv \delta_{11} = \int_0^{3a} \frac{M_1 M_1}{EI}\,dx$$

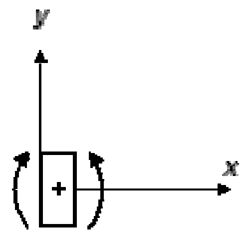
Como el diagrama de M_1 es nulo en $a < x < 3a$, basta con integrar entre 0 y a, con lo cual solo es necesario determinar el diagrama M_0 entre 0 y a.

Para hallar el diagrama M_0 hay que calcular, como mínimo, la reacción V_C. Suponiendo V_C hacia arriba e imponiendo que el momento flector en la rótula (calculado por la derecha) es nulo, se tiene que:

$$M_F\,(x = 2a^+) = 0 \quad \rightarrow \quad V_C \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad V_C = q\frac{a}{2}$$

Para el criterio de signos de la figura, los diagramas son:





(1 punto)

Las integrales se calculan por el método de multiplicación de gráficos:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}a \cdot a \cdot \frac{2}{3}a\right] = \frac{a^3}{3\,EI} \qquad \delta_{1P} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}a \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot \frac{1}{3}a\right] = \frac{qa^4}{12\,EI}$$

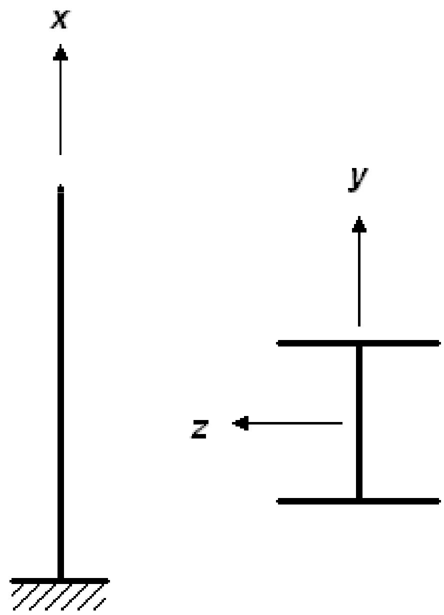
La condición de contorno resulta:

$$\frac{qa^4}{12\,EI} + V_B \cdot \frac{a^3}{3\,EI} = 0 \rightarrow \qquad V_B = -\frac{qa}{4}$$

La reacción tiene sentido descendente (contrario al supuesto inicialmente) por ser el resultado negativo. (1 punto)

5.- Se eligen como referencia los ejes de la figura.

Para resolver el problema hay que determinar previamente el plano de pandeo: aquel en el cual la esbeltez es máxima.



Al ser las condiciones de sustentación las mismas en los planos *xz* y *xy*, la esbeltez es máxima en el plano perpendicular al eje de inercia mínima (eje de giro). Al inspeccionar los valores de los momentos de inercia en las tablas de los perfiles HEA se observa que el eje de giro es el eje *y*, por lo que el plano de pandeo será el *xz*.

La esbeltez máxima que permiten las tablas del acero A-42 es de 250, por lo que:

$$\lambda_{xz} = \frac{L_{p\,xz}}{i_y} \leq 250 \quad \rightarrow \quad \frac{2 \cdot 500\,(\mathrm{cm})}{\mathrm{i_y}} \leq 250 \quad \rightarrow \quad \mathrm{i_y} \geq 4\ \mathrm{cm} \qquad \text{(1 punto)}$$

El primer perfil que cumple la condición es el HEA 180, con i_y = 4,52 cm y sección Ω = 45,3 cm^2, cuya esbeltez real es $\lambda_{xz} = \frac{2 \cdot 500\,(\mathrm{cm})}{4{,}52\,(\mathrm{cm})} = 221{,}2$.

Hay que comprobar que $\omega \frac{N}{\Omega} < \sigma_{adm}$.

El coeficiente ω se obtiene de las tablas del acero A-42 entrando con el valor de la esbeltez real:

$$\lambda_{xz} = 221{,}2 \quad \rightarrow \quad \omega = 8{,}24$$

Sustituyendo: $$\omega \frac{N}{\Omega} = 8{,}24 \cdot \frac{10^5\,(\mathrm{N})}{45{,}3 \cdot 10^2\,(\mathrm{mm}^2)} = 182\,\mathrm{MPa} > 170\,\mathrm{MPa} \qquad \text{(No vale)}$$

Perfil HEA 200: i_y = 4,98 cm ; Ω = 53,8 cm^2 ; $\lambda_{xz} = \frac{2 \cdot 500\,(\mathrm{cm})}{4{,}98\,(\mathrm{cm})} = 200{,}8 \rightarrow \omega = 6{,}84$

Sustituyendo: $$\omega \frac{N}{\Omega} = 6{,}84 \cdot \frac{10^5\,(\mathrm{N})}{53{,}8 \cdot 10^2\,(\mathrm{mm}^2)} = 128\,\mathrm{MPa} < 170\,\mathrm{MPa} \qquad \text{(Vale)}$$

(1 punto)