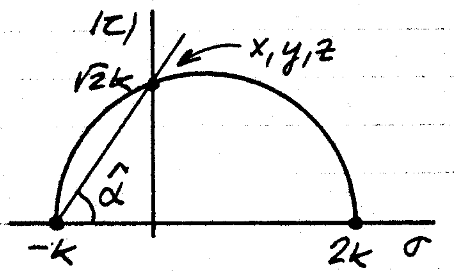
ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES **CURSO 2001-2002**

EXAMEN DE JUNIO (1er SEMESTRE) **26-6-2002**

CUESTIONES

1.- Las tensiones principales en un punto de un sólido son: $\sigma_1 = 2k$; $\sigma_2 = \sigma_3 = -k$. Se pide determinar la matriz de tensiones [T] en un sistema de referencia tal que la dirección principal 1 forme ángulos iguales con los ejes coordenados. (2 puntos)

Al ser $\sigma_2=\sigma_3$ los círculos de Mohr están degenerados en uno único, en el que sólo es posible construir el ángulo $\hat{\alpha}$. Levantando $\hat{\alpha}_x = \hat{\alpha}_y = \hat{\alpha}_z = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ se obtiene el mismo punto representativo $(0, \sqrt{2}k)$ para los tres planos coordenados. Así pues:



$$\left(\begin{array}{l} \sigma_{nx} = \sigma_{ny} = \sigma_{nz} = 0 \\ \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = (\sqrt{2}k)^2 \end{array}\right.$$

de donde $|\tau_{xy}| = |\tau_{xz}| = |\tau_{yz}| = k$
(las 3 positivas ó 1 positiva y 2 negat.) $[T] = \begin{pmatrix} 0 & \pm k & \pm k \\ \pm k & 0 & \pm k \\ \pm k & \pm k & 0 \end{pmatrix}$

2.- El cubo de lado ℓ indicado en la figura está sometido a un estado de deformación homogéneo. Los vectores desplazamiento de los vértices O, A, B, C son:

$\delta_O=(0,0,0)$

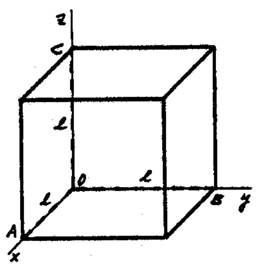
$\delta_A=(d,2d,0)$

$\delta_B=(d,d,0)$

$\delta_C=(0,0,d)$

siendo $d \ll \ell$.

Obtener la matriz de deformación [D]. (2 puntos)



En un estado homogéneo $[D]=[cte]$, luego $\vec{\delta}(x,y,z)$ es lineal

$$\left(\begin{array}{l} u = U_1 x + U_2 y + U_3 z + U_4 \\ v = V_1 x + V_2 y + V_3 z + V_4 \\ w = W_1 x + W_2 y + W_3 z + W_4 \end{array}\right.$$

Identificando el vector desplazamiento en los puntos O, A, B, C se obtienen los 12 coeficientes

$$\left(\begin{array}{l} u = \frac{d}{\ell}(x+y) \\ v = \frac{d}{\ell}(2x+y) \\ w = \frac{d}{\ell} z \end{array}\right. \quad \text{de donde } [D] = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{\ell}$$

3.- Determinar la expresión más general que pueden tener las componentes de la matriz de tensiones en un estado plano, si la componente σ_{nx} sólo depende de y; la componente σ_{ny} sólo depende de x; y las fuerzas de volumen son nulas. (3 puntos)

Al ser $X = Y = 0$ las ecuaciones de equilibrio interno y la ecuación de compatibilidad en tensiones resultarán:

$$\left(\begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{ny}}{\partial y} = 0 \\ \Delta(\sigma_{nx} + \sigma_{ny}) = 0 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 & (2) \\ \dfrac{d^2\sigma_{ny}}{dx^2} + \dfrac{d^2\sigma_{nx}}{dy^2} = 0 & (3) \end{array}\right.$$

De (1) y (2) se tiene que τ_{xy} debe ser constante: $\tau_{xy} = C$

Para que se verifique (3) las derivadas de funciones de distintas variables deberán ser constantes:

$$\left(\begin{array}{l} \dfrac{d^2\sigma_{ny}}{dx^2} = k \\ \dfrac{d^2\sigma_{nx}}{dy^2} = -k \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{l} \sigma_{ny} = \dfrac{k}{2}x^2 + a_1 x + b_1 \\ \sigma_{nx} = -\dfrac{k}{2}y^2 + a_2 y + b_2 \end{array}\right.$$

Finalmente $\sigma_{nz} = 0$ (EPT) ; $\sigma_{nz} = \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{ny})$ (EPD).

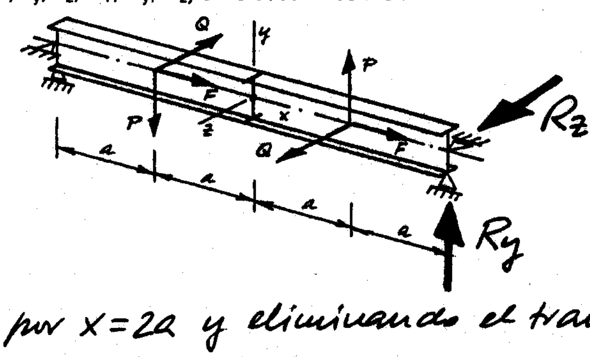
4.- Enunciado del Principio de los Trabajos Virtuales. (1 punto)

Se considera un sólido en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas $\vec{f_S}, \vec{f_V}$ que dan lugar a un estado tensional $[T]$; y un campo de desplazamientos virtuales $\vec{\delta}^*$, compatible con las condiciones de sustentación, y cuya matriz de deformaciones infinitesimales es $[D^*]$.

El P.T.V. dice que el trabajo externo realizado por $\vec{f_S}$ y $\vec{f_V}$ sobre $\vec{\delta}^*$ es igual al trabajo interno realizado por $[T]$ sobre $[D^*]$.

$$\iint_S \vec{f_S} \cdot \vec{\delta}^* dS + \iiint_V \vec{f_V} \cdot \vec{\delta}^* dV = \iiint_V (\sigma_{nx}\varepsilon_x^* + \cdots + \tau_{yz}\gamma_{yz}^*) dV$$

5.- Para la viga simplemente apoyada indicada en la figura, se pide determinar todos los esfuerzos (N, T_y, T_z, M_T, M_y, M_z) en la sección central. (2 puntos)



Tomando momentos respecto a $x=0$ se obtiene:

$$\left(\begin{array}{l} R_y = \dfrac{1}{4a}(Pa - P3a) = -\dfrac{P}{2} \\ R_z = \dfrac{1}{4a}(Qa - Q\cdot 3a) = -\dfrac{Q}{2} \end{array}\right.$$

Cortando por $x = 2a$ y eliminando el tramo $(2a, 4a)$, tendremos:

$$\left(\begin{array}{l} N = F \\ T_y = P + R_y = \dfrac{P}{2} \\ T_z = Q + R_z = \dfrac{Q}{2} \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{l} M_T = 0 \\ M_y = -Qa - R_z 2a = 0 \\ M_z = Pa + R_y 2a = 0 \end{array}\right.$$