

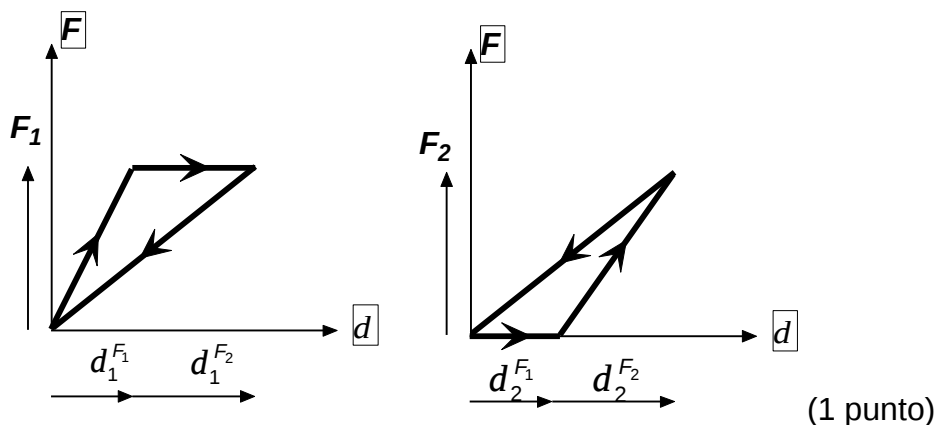
**CUESTIONES (BLOQUE 2)**

5.- (A)- Al aplicar carga en el punto 1 el desplazamiento eficaz en 1 aumenta simultáneamente con la carga, mientras que en el punto 2 la carga es nula pero el desplazamiento eficaz crece.

Cuando se aplica carga en el punto 2 se produce un proceso análogo, pero esta vez es el desplazamiento eficaz en 2 el que aumenta simultáneamente con la carga, y en el punto 1 crece el desplazamiento eficaz mientras que la carga en 1 no varía.

Al descargar simultáneamente ambos puntos, los desplazamientos eficaces decrecen hasta cero cuando decrecen las cargas.

Así pues, el proceso se puede esquematizar como sigue:



(B)- El trabajo realizado por cada carga durante el proceso es:

$$W_{F_1} = \oint_1 F dd = \frac{1}{2} F_1 d_1^{F_1} + F_1 d_1^{F_2} - \frac{1}{2} F_1 (d_1^{F_1} + d_1^{F_2}) \rightarrow W_{F_1} = \frac{1}{2} F_1 d_1^{F_2}$$

$$W_{F_2} = \oint_2 F dd = \frac{1}{2} F_2 d_2^{F_2} - \frac{1}{2} F_2 (d_2^{F_1} + d_2^{F_2}) \rightarrow W_{F_2} = -\frac{1}{2} F_2 d_2^{F_1}$$

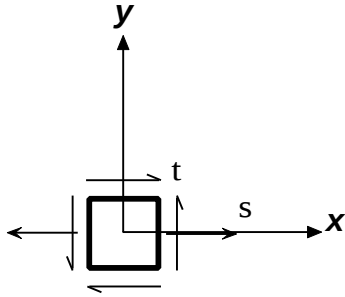
Si el proceso es reversible, la suma de ambos trabajos debe ser nula:

$$W_{F_1} + W_{F_2} = 0 \rightarrow \frac{1}{2} F_1 d_1^{F_2} - \frac{1}{2} F_2 d_2^{F_1} = 0$$

Y el teorema de Maxwell-Betti queda demostrado:

$$F_1 d_1^{F_2} = F_2 d_2^{F_1} \quad (1 \text{ punto})$$

6.- Tomando como ejes  $x$  e  $y$  los de la figura, la matriz de tensiones es:



$$[T]_{xyz} = \begin{pmatrix} s & t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las tensiones principales son:

$$s_a = 0$$

$$s_{b,c} = \frac{s_{nx} + s_{ny}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_{nx} - s_{ny}}{2}\right)^2 + t_{xy}^2}$$

Sustituyendo valores:

$$s_{b,c} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2}$$

El radicando es mayor que  $\left(\frac{s}{2}\right)^2$ , por lo que  $\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2} > \frac{s}{2}$ . Así  $s_{b,c}$  son una positiva y otra negativa. Ordenando las tres tensiones principales:

$$s_1 = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2} \quad s_2 = 0 \quad s_3 = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2} \quad (0,5 \text{ puntos})$$

La teoría de Tresca establece que se alcanza la plasticidad cuando  $s_1 - s_3 = s_e$ .

Sustituyendo:

$$2\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2} = s_e \rightarrow \left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2 = \frac{s_e^2}{4} \rightarrow s^2 + 4t^2 = s_e^2$$

Operando:

$$\left(\frac{s}{s_e}\right)^2 + \left(\frac{t}{s_e/2}\right)^2 = 1$$

Que es una elipse de semiejes  $s_e, \frac{s_e}{2}$  en el diagrama  $s - t$ . (1 punto)

Según la teoría de Von Mises se inicia la plasticidad cuando:

$$(s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2 + (s_2 - s_3)^2 = 2s_e^2$$

Sustituyendo valores:

$$\left[ \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2} \right]^2 + \left[ \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2} \right]^2 + 4 \left[ \left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2 \right] = 2s_e^2$$

Desarrollando:

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2\right] + 2\frac{s}{2}\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2} + \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2\right] - 2\frac{s}{2}\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2} + 4\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2\right] = 2s_e^2$$

La expresión se reduce a:

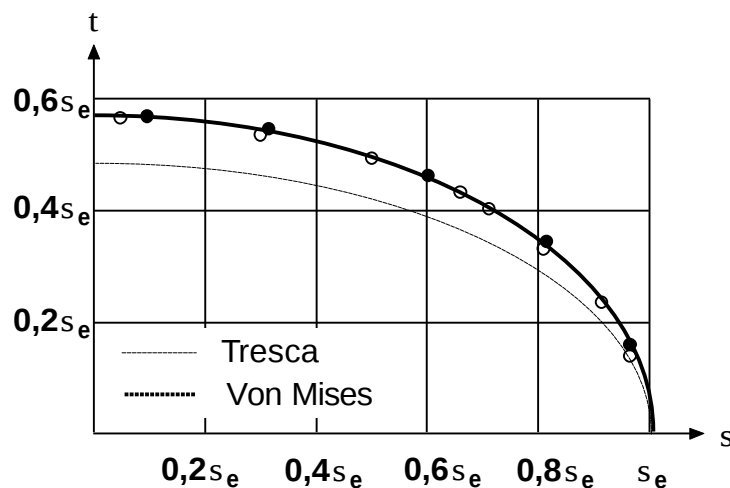
$$6 \left[ \left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2 \right] + 2\left(\frac{s}{2}\right)^2 = 2s_e^2 \rightarrow 4\left(\frac{s}{2}\right)^2 + 3t^2 = s_e^2 \rightarrow s^2 + 3t^2 = s_e^2$$

Operando:

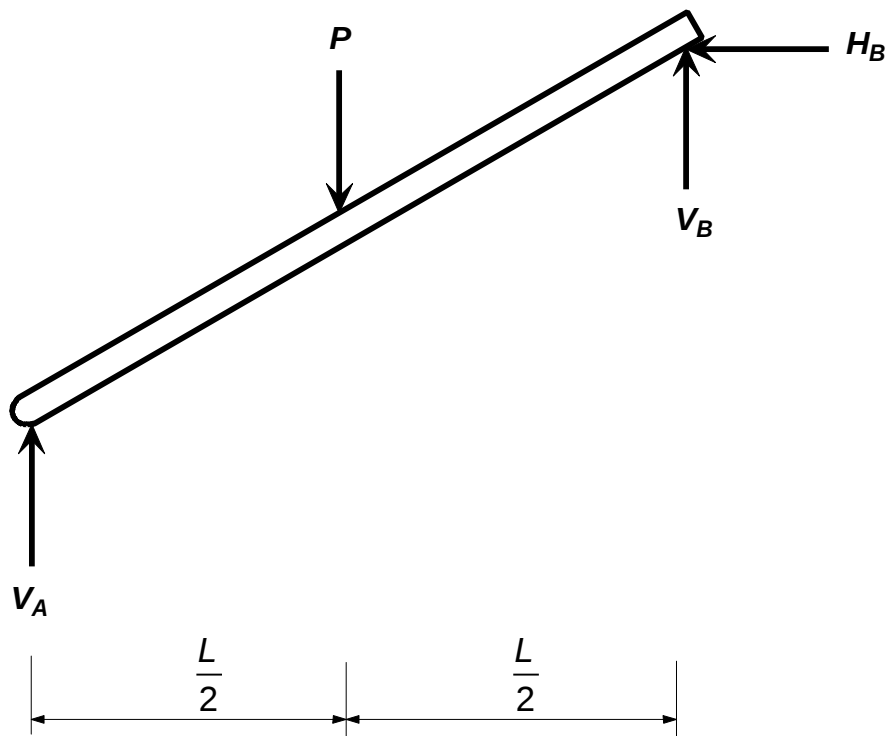
$$\left(\frac{s}{s_e}\right)^2 + \left(\frac{t}{s_e/\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

La curva es otra elipse de semiejes  $s_e$  y  $0,58s_e$  en el diagrama  $s - t$ .

Al dibujar las elipses sobre el diagrama de ensayos se comprueba que Von Mises se ajusta mejor que Tresca a los resultados. (1,5 puntos)

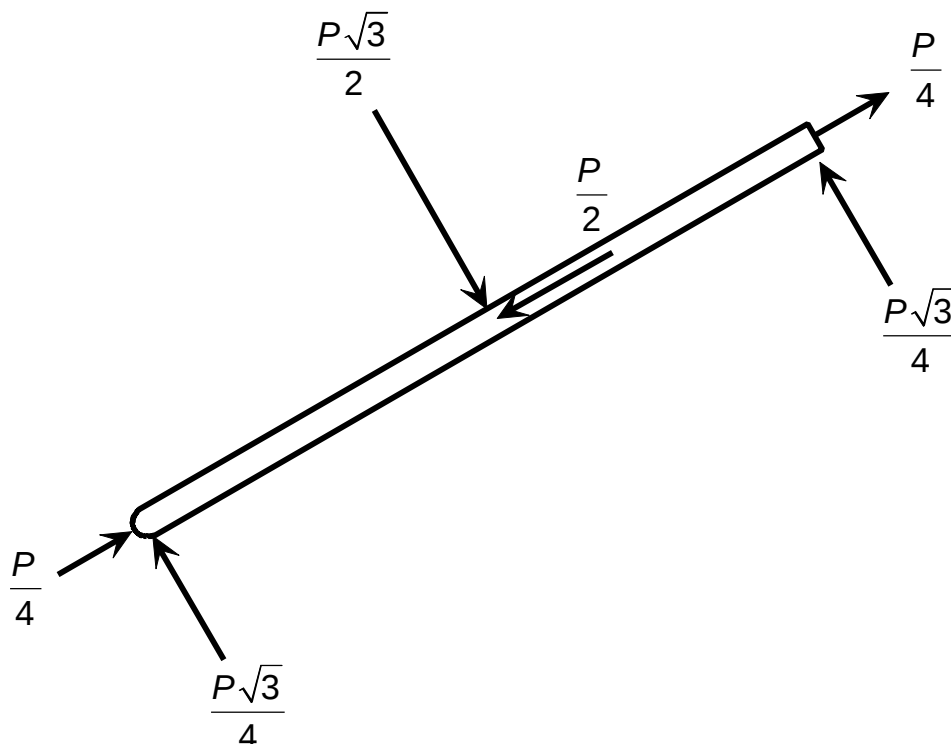


7.- El apoyo inferior se comporta como articulado móvil y el superior como articulado fijo. El esquema de fuerzas en la barra es el siguiente:

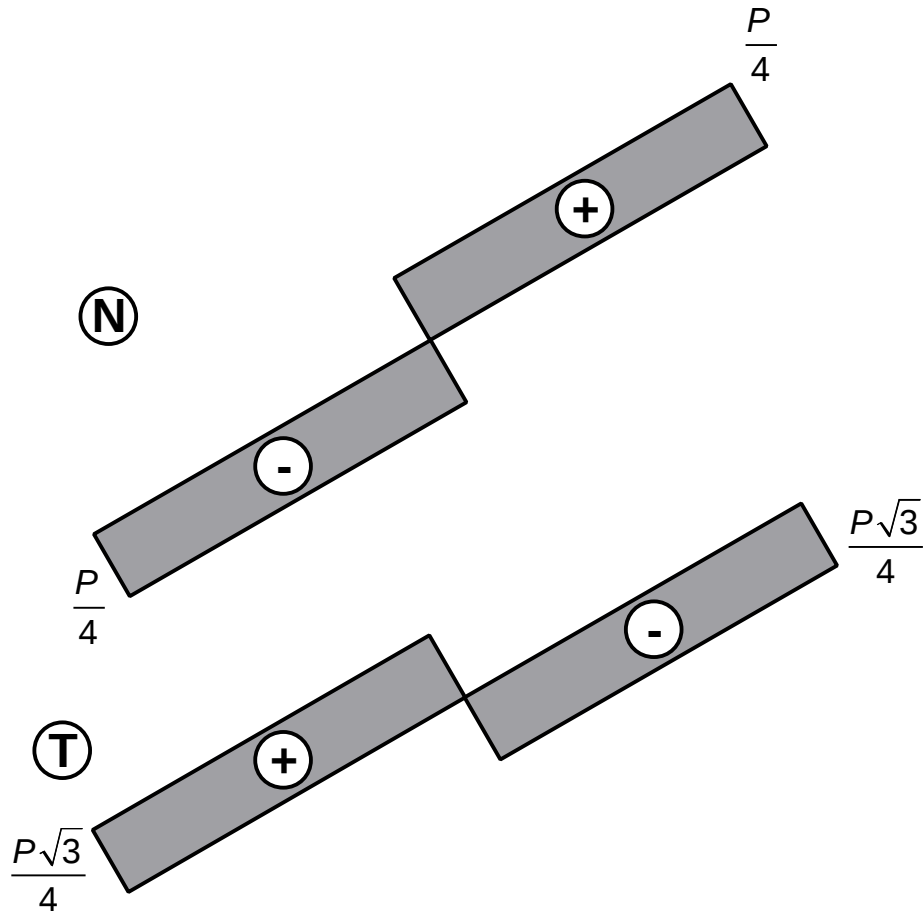


Al plantear el equilibrio horizontal, se deduce que  $H_B = 0$  y el sistema de fuerzas resultante es simétrico, por lo que  $V_A = V_B = \frac{P}{2}$ .

Para los diagramas de esfuerzo normal y cortante se proyectan las fuerzas según la dirección de la barra y la normal a ésta:

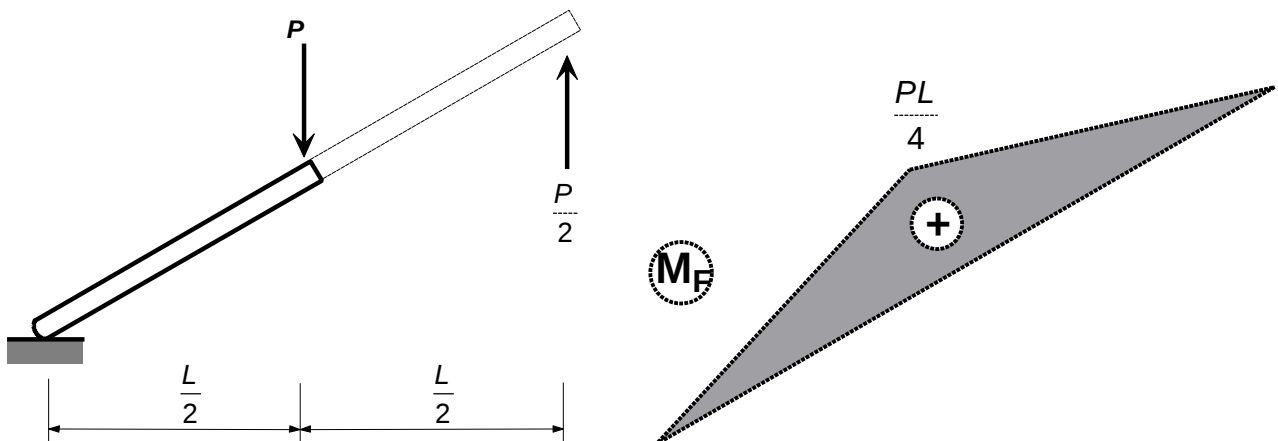


Los diagramas de esfuerzo normal y cortante son:



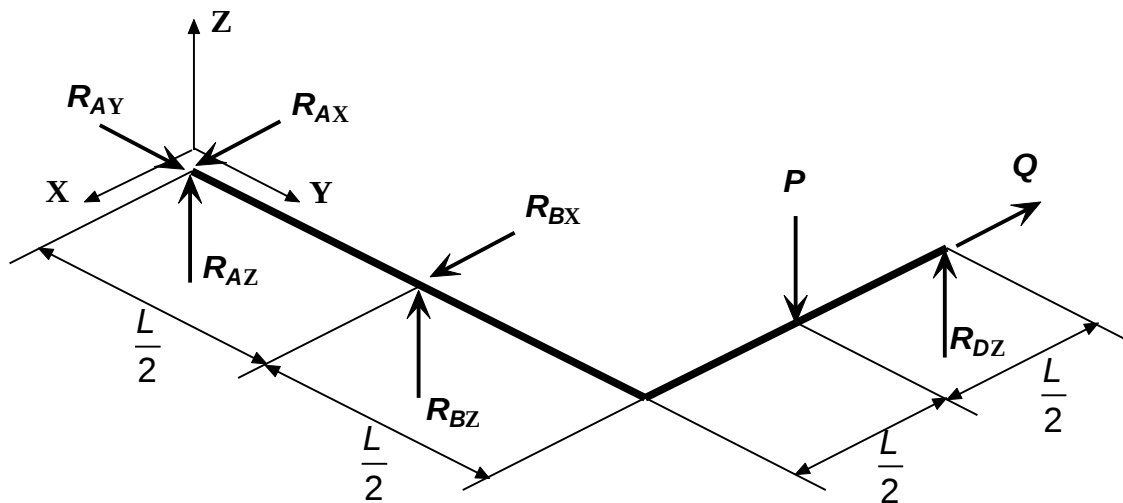
(1 punto)

Para el diagrama de momento flector, es más sencillo emplear el esquema de fuerzas inicial y basarse en el diagrama de esfuerzo cortante: El momento flector es lineal, nulo en los apoyos y tiene su máximo donde el cortante tiene un cero, es decir, en el centro de la barra. En este punto el valor del momento flector es, eliminando la mitad derecha de la barra:  $M_F = \frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2}$ . El diagrama queda:



(1 punto)

8.- De las condiciones del enunciado se deduce el siguiente esquema de fuerzas para la estructura:



Aplicando equilibrio traslacional y rotacional respecto del punto A, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_A F_X = 0 \rightarrow R_{AX} + R_{BX} - Q = 0$$

$$\sum_A F_Y = 0 \rightarrow R_{AY} = 0 \quad (0,5 \text{ puntos})$$

$$\sum_A F_Z = 0 \rightarrow R_{AZ} + R_{BZ} + R_{DZ} - P = 0$$

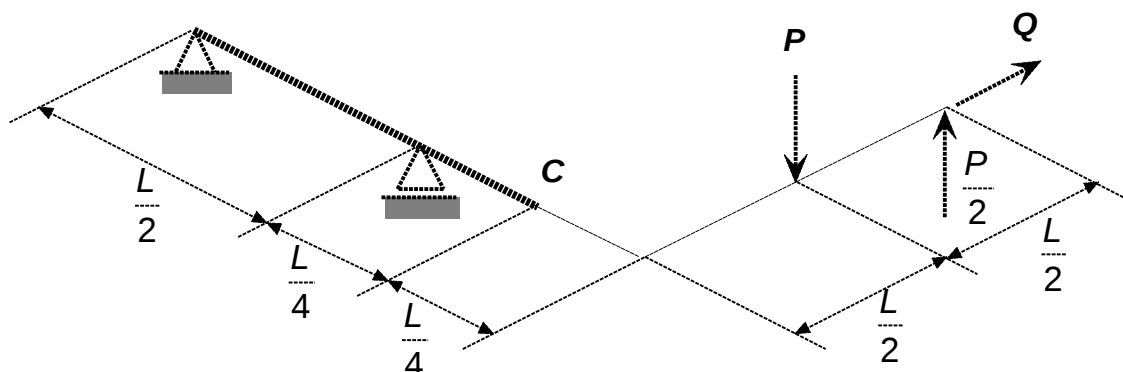
$$\sum_A M_X = 0 \rightarrow R_{BZ} \frac{L}{2} - PL + R_{DZ}L = 0$$

$$\sum_A M_Y = 0 \rightarrow -P \frac{L}{2} + R_{DZ}L = 0 \quad (0,5 \text{ puntos})$$

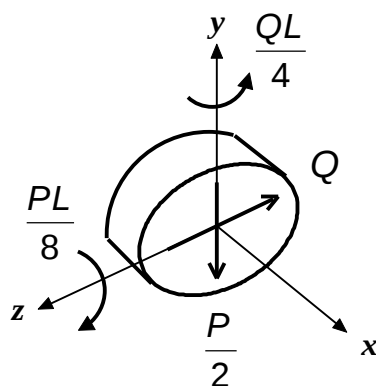
$$\sum_A M_Z = 0 \rightarrow -R_{BX} \frac{L}{2} + QL = 0$$

De la ecuación quinta se deduce que  $R_{DZ} = \frac{P}{2}$ . (0,5 puntos)

Para determinar los esfuerzos y momentos en la sección C se elimina la parte de la estructura del lado de la x creciente, es decir:



Los esfuerzos en la sección C son:



Que para el criterio de signos del enunciado son:

$$N = 0 \quad M_T = 0$$

$$T_y = -\frac{P}{2} \quad M_y = \frac{QL}{4}$$

$$T_z = -Q \quad M_z = -\frac{PL}{8}$$

(0,5 puntos)

(1 punto)

*También se puede eliminar la otra parte de la estructura, pero en ese caso habría que calcular todas las reacciones y prestar mucha atención a los sentidos positivos de los esfuerzos en la cara oculta del criterio de signos .*