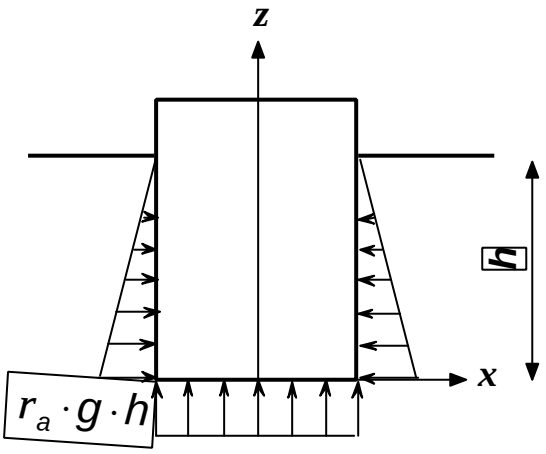
CUESTIONES

1.- a).- El peso del fluido contenido en el recipiente debe equilibrarse con el empuje del agua sobre la tapa inferior. La presión del agua es proporcional a la profundidad, por lo que planteando el equilibrio de fuerzas verticales queda:

$$r \cdot g \cdot L \cdot \frac{p}{4} \cdot f^2 - r_a \cdot g \cdot h \cdot \frac{p}{4} \cdot f^2 = 0$$

Despejando: $h = \frac{r}{r_a} L \quad \rightarrow \quad h = \frac{800}{1000} \cdot 3\ (m) = 2{,}4\ m$ (1 punto)

b).- Sobre la superficie exterior de la zona sumergida del recipiente, actúa la presión del agua. En la zona no sumergida no existen fuerzas exteriores (sobre la presión atmosférica no existen datos en el enunciado y por tanto se desprecia).



El aspecto es el de la figura, y su expresión en la zona sumergida es $\vec{f}_\Omega = r_a \cdot g \cdot (z-h) \cdot \vec{u}$, siendo $\vec{u}$ el vector normal saliente del contorno.

En la cara inferior del recipiente, z = 0 y $\vec{u} = -\vec{k}$, por lo que $\vec{f}_\Omega = r_a \cdot g \cdot h \cdot \vec{k}$.

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\vec{f}_\Omega = 1000\left(\frac{kg}{m^3}\right) \cdot 9{,}8\left(\frac{N}{kg}\right) \cdot 2{,}4(m) \cdot \vec{k} = 23520 \cdot \vec{k}\left(\frac{N}{m^2}\right)$$

(0,5 puntos)

En el contorno lateral $\vec{u}$ se obtiene como $\vec{u} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, siendo $\vec{n}^t = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ el vector gradiente a la superficie $f(x, y, z) = 0$ del contorno.

La expresión de la superficie cilíndrica es $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, por b que el vector gradiente es $\vec{n}^t = (x \quad y \quad 0)$, y su módulo $|\vec{n}| = \sqrt{x^2 + y^2} = R$. Así pues, $\vec{u}^t = \frac{1}{R}(x \quad y \quad 0)$.

Como $R = 1\ m$, entonces $\vec{u}^t = (x \quad y \quad 0)$ (adimensional si x, y se expresan en metros).

La fuerza de superficie será $\vec{f}_\Omega = r_a \cdot g \cdot (z-h) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j})\left(\frac{N}{m^2}\right)$ (1,5 puntos)

c).- Si el estado tensional fuera homogéneo, [T] estaría formada por términos constantes. Como la fuerza de superficie es $\vec{f}_\Omega = [T]_{contorno} \cdot \vec{u}_{contorno}$, entonces a lo largo de una generatriz exterior $\vec{f}_\Omega$ no debería variar, ya que todos sus puntos tienen las mismas coordenadas x e y, y por ello $\vec{u}_{contorno} = (x \quad y \quad 0)$ es constante en ella. Como $\vec{f}_\Omega$ varía con la profundidad, entonces el estado tensional no puede ser homogéneo. (0,5 puntos)

2.- La expresión del coeficiente de seguridad es $n = \frac{s_{et}}{s_{eq}}$, siendo s_{et} el límite elástico a tracción del material y s_{eq} la tensión equivalente de cálculo, cuyas expresiones, según las teorías de Tresca, von Mises y simplificada de Mohr son:

Tresca: $s_{eq} = s_1 - s_3$

Von Mises: $s_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2 + (s_2 - s_3)^2}$

Simplificada de Mohr: $s_{eq} = s_1 - \frac{s_{et}}{|s_{ec}|} s_3$

Puesto que $s_{et} = |s_{ec}|$, las teorías de Tresca y simplificada de Mohr coinciden (se trata de un material dúctil).

Los estados tensional y de deformación en los puntos interiores de un recipiente sometido a presión interna adoptan la forma:

$$[T] = \begin{pmatrix} s_{nx} & t_{xy} & 0 \\ t_{xy} & s_{ny} & 0 \\ 0 & 0 & s_{nz} \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{Hooke} \xleftarrow[Lamé]{} \quad [D] = \begin{pmatrix} e_x & \frac{1}{2}g_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}g_{xy} & e_y & 0 \\ 0 & 0 & e_z \end{pmatrix}$$

Como puede observarse, ninguna de las dos matrices es bidimensional.

La tensión $s_{nz} = -15\,MPa$ es una tensión principal. Para obtener las otras dos hay que hallar e_x, e_y y $\frac{1}{2}g_{xy}$ a partir de las lecturas de la roseta, calcular las deformaciones principales y aplicar las ecuaciones de Lamé.

La lectura de una galga extensométrica colocada en el plano ***xy*** según la dirección $\vec{u}^t = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ es $e_n = \vec{u}^t [D] \vec{u} = e_x \cdot a^2 + e_y \cdot b^2 + g_{xy} \cdot ab$. Los vectores directores de las galgas *a*, *b*, *c* y sus lecturas son:

$$\vec{u}_a^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad e_{na} = e_x$$

$$\vec{u}_b^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad e_{nb} = \frac{1}{4} e_x + \frac{3}{4} e_y - \frac{\sqrt{3}}{4} g_{xy}$$

$$\vec{u}_c^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad e_{nc} = \frac{1}{4} e_x + \frac{3}{4} e_y + \frac{\sqrt{3}}{4} g_{xy}$$

Sumando las lecturas de *b* y *c*, y sustituyendo la lectura de *a* por ε_x se obtiene ε_y. Restando las lecturas de *c* y *b* se obtiene γ_{xy}:

$$e_{nb} + e_{nc} = \frac{e_x + 3e_y}{2} \quad \rightarrow \quad e_y = \frac{2(e_{nb} + e_{nc}) - e_{na}}{3}$$

$$e_{nc} - e_{nb} = \frac{\sqrt{3}}{2} g_{xy} \quad \rightarrow \quad \frac{g_{xy}}{2} = \frac{e_{nc} - e_{nb}}{\sqrt{3}}$$

Sustituyendo valores, se tiene:

$$e_x = 23 \cdot 10^{-5}$$

$$e_y = \frac{2 \cdot (14{,}5 + 10{,}3) - 23}{3} \cdot 10^{-5} = 8{,}9 \cdot 10^{-5} \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

$$\frac{g_{xy}}{2} = \frac{10{,}3 - 14{,}5}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-5} = -2{,}4 \cdot 10^{-5}$$

Las dos deformaciones principales asociadas se obtienen a partir de la expresión:

$$e = \frac{e_x + e_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{e_x - e_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{g_{xy}}{2} \right)^2}$$

Sustituyendo valores:

$$e = \left[\frac{23 + 8{,}9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{23 - 8{,}9}{2} \right)^2 + (2{,}4)^2} \right] \cdot 10^{-5} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} e = 23{,}4 \cdot 10^{-5} \\ e = 8{,}5 \cdot 10^{-5} \end{cases}$$

La otra deformación principal es e_z, que se calcula a partir de la tercera ecuación de Lamé:

$$s_{nz} = l(e_x + e_y + e_z) + 2Ge_z \quad \rightarrow \quad s_{nz} = l(e_x + e_y) + (l + 2G)e_z \quad \rightarrow \quad e_z = \frac{s_{nz} - l(e_x + e_y)}{l + 2G}$$

Sustituyendo valores:

$$e_z = \frac{-15 - 1{,}15 \cdot 10^5 (MPa) \cdot (23 + 8{,}9) \cdot 10^{-5}}{(1{,}1 + 2 \cdot 0{,}77) \cdot 10^5 (MPa)} = -19{,}6 \cdot 10^{-5} \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

Ordenando las deformaciones principales:

$$e_1 = 23{,}4 \cdot 10^{-5} \quad e_2 = 8{,}5 \cdot 10^{-5} \quad e_3 = -19{,}6 \cdot 10^{-5}$$

Restando las ecuaciones de Lamé una a una, se obtienen las diferencias de tensiones principales como:

$$s_i - s_j = 2G(e_i - e_j)$$

Así, las tensiones equivalentes y los coeficientes de seguridad resultan ser:

Tresca y simplificado de Mohr:

$$s_{eq} = 2G(e_1 - e_3)$$

Sustituyendo valores:

$$s_{eq} = 2 \cdot 0{,}77 \cdot 10^5 (MPa) \cdot (23{,}4 + 19{,}6) 10^{-5} = 66{,}2\ MPa$$

$$n = \frac{200}{66{,}2} = 3{,}02$$

Von Mises:

$$s_{eq} = \frac{2G}{\sqrt{2}} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_1 - e_3)^2 + (e_2 - e_3)^2} = \sqrt{2}\, G \cdot \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_1 - e_3)^2 + (e_2 - e_3)^2}$$

Sustituyendo:

$$s_{eq} = \sqrt{2} \cdot 0{,}77 \cdot 10^5 (MPa) \cdot \sqrt{(23{,}4 - 8{,}5)^2 + (23{,}4 + 19{,}6)^2 + (8{,}5 + 19{,}6)^2} \cdot 10^{-5} = 58{,}2\ MPa$$

$$n = \frac{200}{58{,}2} = 3{,}44$$ (0,5 puntos)

3.- a).- Para ser solución del problema elástico, la matriz de tensiones debe cumplir las condiciones de equilibrio (interno y en el contorno) y las de compatibilidad.

Ecuaciones de equilibrio interno:

$$f_{vx} + \frac{\partial s_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$f_{vy} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_{ny}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$f_{vz} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial s_{nz}}{\partial z} = 0$$

La fuerza de volumen es el peso específico $\vec{f}_v = -g \cdot \vec{k}$, por lo que las dos primeras ecuaciones son idénticamente nulas y la tercera se verifica:

$$-g + 0 + 0 + \frac{\partial [g(z - L)]}{\partial z} = 0$$ (0,5 puntos)

Ecuaciones de equilibrio en el contorno: $\bar{f}_\Omega = [T]_{contorno} \cdot \vec{u}_{contorno}$

No hay fuerzas de superficie $\left(\bar{f}_\Omega = \vec{0}\right)$ en todo el contorno (salvo en el empotramiento), por lo que hay que comprobar que $[T]_{contorno} \cdot \vec{u}_{contorno} = \vec{0}$ en la base superior y en las caras laterales.

Base superior (z = L): $[T] = [0]$, luego se verifica.

Caras $x = \pm\frac{b}{2}$ $\rightarrow$ $\vec{u} = \vec{i}$, también verifica.

Caras $y = \pm\frac{b}{2}$ $\rightarrow$ $\vec{u} = \vec{j}$, también cumple. (1 punto)

Ecuaciones de compatibilidad:

Las ecuaciones de Michell son las de compatibilidad, expresadas en tensiones, en las que se han introducido las ecuaciones de equilibrio interno. Por ello, si se verifica el equilibrio, se verifica la compatibilidad si se verifican las ecuaciones de Michell.

Como las ecuaciones de Michell son expresiones en derivadas parciales de segundo orden y las componentes de la matriz de tensiones son lineales, entonces se verifican. (0,5 puntos)

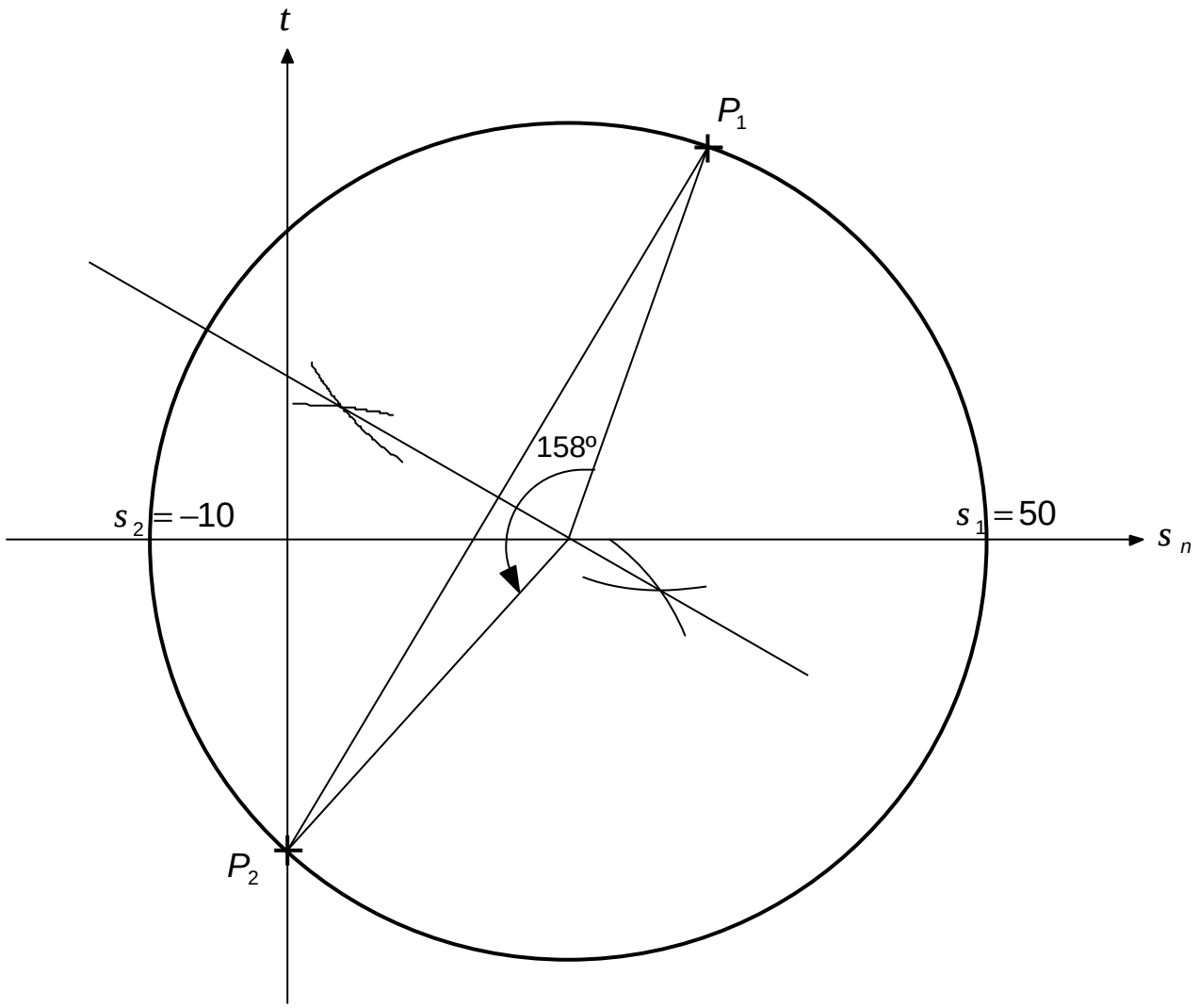
También se pueden aplicar las Leyes de Hooke para obtener la matriz de deformación y emplear las ecuaciones de compatibilidad expresadas en deformaciones. El resultado es idéntico.

b).- En el empotramiento, todos los desplazamientos están impedidos. En particular, u = v = 0. Las deformaciones longitudinales serán $e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $e_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Sin embargo, aplicando las leyes de Hooke a la matriz de tensiones del enunciado, se tiene $e_x = e_y = \nu g(L - z)$, que no son nulas en z = 0. Por tanto, la solución de tensiones dada por la teoría elemental de la tracción-compresión no es válida porque no respeta la condición de contorno en desplazamientos del empotramiento. (0,5 puntos)

4.- Por ser homogéneo el estado de tensiones, en que cualquier punto del sólido dos planos paralelos tienen el mismo vector tensión.

Los vectores tensión para los dos planos del enunciado representan dos puntos en el diagrama de Mohr (P_1 y P_2), aunque no necesariamente diametralmente opuestos. Para

hallar el centro del círculo, se traza la mediatriz del segmento que los une, y se halla el punto de intersección con el eje de abscisas. Una vez hallado el centro, el ángulo que forman las normales es la mitad del ángulo que forman los segmentos que unen el centro con los puntos. Midiendo con un transportador de ángulos, se obtiene $2q \cong 158^{o}$, por lo que $q \cong 79^{o}$.



(1,5 puntos)

Una vez trazado el círculo, las tensiones principales del estado plano se determinan midiendo sobre él, y resultan ser $s_1 \cong 50\ MPa\ y\ s_2 \cong -10\ MPa$.

La deformación según el eje z se halla aplicando la tercera ley de Hooke, teniendo en cuenta que $s_{nz} = 0$ es una tensión principal:

$$e_z = \frac{1}{E}\left[s_{nz} - m\left(s_1 + s_2\right)\right] \qquad \rightarrow \qquad e_z = \frac{-m}{E}\left(s_1 + s_2\right)$$

Sustituyendo valores:

$$e_z = \frac{-0{,}34}{0{,}7 \cdot 10^5 (MPa)}(50 - 10)(MPa) = -19{,}4 \cdot 10^{-5}$$ (1 punto)