EXAMEN 11/9/03

CUESTIONES

1.- Si las tensiones principales en un punto de un sólido elástico valen 30, 10 y –10 MPa respectivamente, se pide:

- Hallar el módulo del vector tensión para la dirección en la que aparezca la $\tau_{máx}$.
- Hallar las componentes intrínsecas de la tensión en la dirección que forme 30º con la dirección principal 1 y 60º con la dirección principal 2.

---

1. τ_{max} aparece en la dir.: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

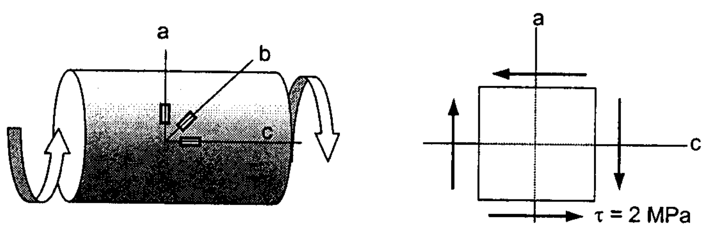
$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 30 & & \\ & 10 & \\ & & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\sqrt{2} & 0 & -5\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{\sigma}| = \sqrt{2\cdot 15^2 + 50} = \boxed{22{,}36 \text{ MPa}}$$

Para $\bar{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 30 & & \\ & 10 & \\ & & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\sqrt{3} \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\tau} = \bar{\sigma}\cdot\bar{u} = \frac{45}{2} + 2{,}5 = \boxed{25 \text{ MPa}}$$

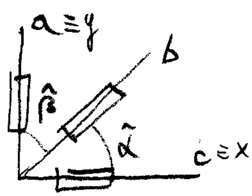
$$\boxed{\sigma_n} = \sqrt{|\sigma|^2 - \tau^2} = \boxed{8{,}66 \text{ MPa}}$$

2.- Un transductor de par tiene como elemento de medición un cilindro de acero (E = $2\cdot 10^5$ MPa, ν = 0,3), de dimensiones Ø40 mm y longitud 50 mm. Sobre su superficie se coloca una roseta rectangular de galgas extensométricas, según la figura.



Si el par torsor aplicado produce en la superficie del cilindro un estado de cortadura pura (representado en la figura de la derecha), se pide calcular cuál sería la medida en cada una de las galgas.

2.

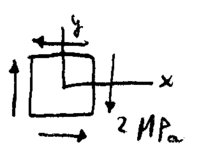


$\varepsilon_a = \varepsilon_y$

$\varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2\hat{\alpha} + \varepsilon_y \cos^2\hat{\beta} + \gamma_{xy}\cos\hat{\alpha}\cos\hat{\beta}$

$\varepsilon_c = \varepsilon_x$

El estado tensional es



$\Rightarrow \sigma_{nx} = 0 = \sigma_{ny} \Rightarrow \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$

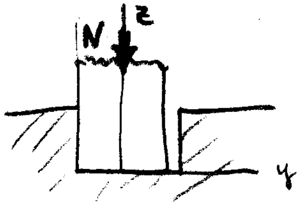
$$\boxed{\gamma_{xy}} = \frac{-\tau_{xy}}{G} = \frac{-\tau_{xy}\cdot 2\cdot(1+\nu)}{E} = \frac{-2\cdot 2\cdot 1{,}3}{2\cdot 10^5} = \boxed{-2{,}6\cdot 10^{-5} \text{ rad}}$$

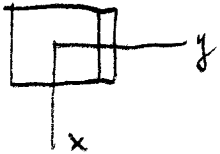
Por tanto $\boxed{\varepsilon_b} = \gamma_{xy}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-1{,}3\cdot 10^{-5}}$ y $\boxed{\varepsilon_a = \varepsilon_c = 0}$

3.- El extremo inferior de una columna prismática de sección cuadrada de 10x10 mm, está encajada sin rozamiento en un hueco que se supone de rigidez infinita. El hueco tiene una sección de 10x11 mm, y 20 mm de altura. Si la columna se carga con 2000 N, determinar el valor de las deformaciones principales en los puntos de la columna dentro del hueco.

Datos: $E = 2\cdot 10^5$ MPa; $\nu = 0{,}25$.

3.





Suponemos que la columna no llega a rellenar la holgura de 1 mm, y verificamos esa hipótesis

$$\sigma_{nz} = \frac{-N}{\Omega} \qquad \sigma_{ny} = 0 \qquad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\boxed{\varepsilon_x = 0} = \sigma_{nx} - \nu\,\sigma_{nz} \Rightarrow \sigma_{nx} = \nu\,\sigma_{nz}$$

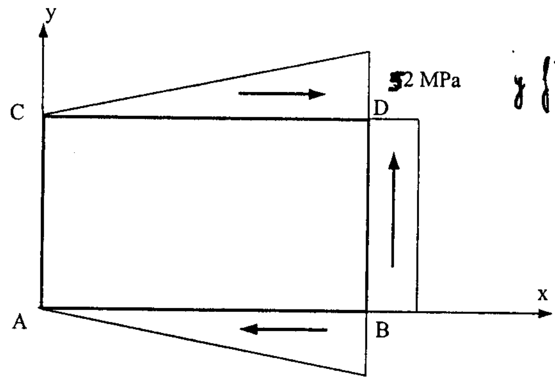
$$\boxed{\varepsilon_y} = \frac{-\nu\,\sigma_{nz}(1+\nu)}{E} = \frac{+0{,}25\cdot 2000\,(1{,}25)}{100\cdot 2\cdot 10^5} = \boxed{+3{,}125\cdot 10^{-5}}$$

x, y, z son dir. principales.

$$\boxed{\varepsilon_z} = \frac{\sigma_{nz}(1-\nu^2)}{E} = \frac{-N(1-\nu^2)}{E\,\Omega} = \frac{-2000\,(1-0{,}25^2)}{2\cdot 10^5\cdot 100} = \boxed{-9{,}375\cdot 10^{-5}}$$

$\Delta l_y = l_y\cdot\varepsilon_y = 10\cdot 3{,}125\cdot 10^{-5} = 3{,}125\cdot 10^{-4} < 1$ mm, luego la hipótesis es correcta.

4.- Una placa rectangular ABCD, de 80x40 cm, está sometida en su contorno a unas fuerzas superficiales, cuyas componentes tangenciales se indican en la figura:



$y \int \vec{Y} = 0$

Sabiendo que las componentes normales sobre las caras AB y CD son, respectivamente, una tracción de 6 MPa y una compresión de 20 MPa, determinar:

a) la función de Airy.

b) leyes de las tensiones normales en el contorno de la placa.

La función de Airy será un pol. en x y de grado n+2 = 3

$$\phi = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2$$

$$\sigma_{nx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2Cx + 6Dy + 2G \Rightarrow G=0 \Rightarrow D=0,\ C=0$$

$$\sigma_{ny} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 6Ax + 2By + 2E \Rightarrow x=0, y=0 \rightarrow E = 3$$

$$x=0,1, y=0 \rightarrow 6 = 0,6A + 6 \Rightarrow A = 0$$

$$x=0, y=0,4 \rightarrow -20 = 0,8B + 6 \rightarrow B = \frac{-130}{4} = -32,5$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -2Bx - 2Cy - F = -2Bx - F \Rightarrow x=0, y=0 \Rightarrow F=0$$

$$x=0,8, y=0 \Rightarrow B = \frac{-130}{4} \checkmark$$

Por tanto a) $\boxed{\phi(x,y) = -32,5x^2y + 3x^2} = x^2\left(3 - \frac{130}{4}y\right)$

b) $\sigma_{nx} = 0$; $y=0 \rightarrow \sigma_{ny} = 6$ MPa

$y=40 \rightarrow \sigma_{ny} = -20$ MPa

4.- Un estado tensional en el que las componentes no nulas de la matriz de tensiones son:

$$\sigma_{nx} = 60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ny} = -30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -40 \text{ MPa}$$

Si el material tiene los límites elásticos a tracción y compresión iguales, y se requiere un coeficiente de seguridad n = 2 respecto del límite elástico, hallar éste siguiendo el criterio de Mohr.

Una tensión principal es $\sigma = 0$; los otros dos

$$\begin{vmatrix} 60-\sigma & -40 \\ -40 & -30-\sigma \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (60-\sigma)(-30-\sigma) = 1600 \Rightarrow -1800 + 30\sigma - 60\sigma + \sigma^2 = 1600$$

$$\Rightarrow \sigma^2 - 30\sigma - 3400 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = 75{,}21 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -45{,}21 \text{ Mpa} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_1 - |\sigma_3|} = 2 \Rightarrow \boxed{\sigma_{et}} = \frac{120{,}42}{2} = \boxed{240{,}84 \text{ MPa}}$$