E. R. M. 1^{ER} SEMESTRE (CUEST.) 7-2-2003

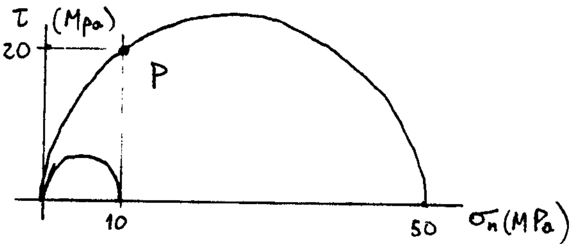
1.- Al ser nulas las tensiones tangenciales, los ejes x, y, z son principales, y las tensiones principales son:

$\sigma_1 = 50$ MPa

$\sigma_2 = 10$ MPa

$\sigma_3 = 0$ MPa

Representando se obtiene:

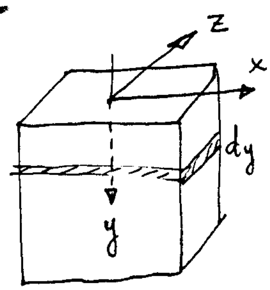


$\hat{\alpha} = 63,4^\circ \rightarrow$ Angulo que forma la normal con el eje z = dir. 1

$\hat{\beta} = 90^\circ$ " " " " " " y = " 2

$\hat{\gamma} = 26,6^\circ \rightarrow$ " " " " " " x = " 3

2.-



$$d\sigma_{ny} = \Omega \cdot dy \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{1}{\Omega} \Rightarrow \sigma_{ny} = \int_0^y -\rho g \, dy = -y\rho g$$

Sol. tensiones $\begin{cases} \sigma_{nx} = 0 \\ \sigma_{ny} = -1,1 \cdot 10^{-4} \cdot y \text{ (MPa)} \\ \sigma_{nz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{cases}$

De las eq. de equilibrio interno obtenemos las fuerzas de volumen

$$\left.\begin{aligned} X + \frac{\partial \sigma_{nx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ Y + \frac{\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{ny}}{\sigma y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ Z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{nz}}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} X &= 0 \\ Y &= \rho \cdot g \cdot \Omega \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \bar{f}_v = \begin{pmatrix} 0 & 1,1 \cdot 10^{4} & 0 \end{pmatrix} \text{ N mm}^{3}$$

Todas las superficies son libres, salvo la base, luego sólo en ella $\boxed{\vec{Y}} = \sigma_{ny}(y=2000) = \boxed{0,22 \text{ MPa}}$

En el resto $\vec{f}_\Omega = 0$

3.- Si $\varepsilon_a = \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_{nx} - \nu\sigma_{ny}\right]$

$\varepsilon_b = \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_{ny} - \nu\sigma_{nx}\right]$

$\left.\right\} \varepsilon_x + \varepsilon_y/\nu = \frac{1}{E}\left[\sigma_{ny}\left(\frac{1}{\nu} - \nu\right)\right] \Rightarrow \sigma_{ny} = \underline{243{,}95\ MPa}$

$\Rightarrow \sigma_{nx} = \underline{213{,}19\ MPa}$

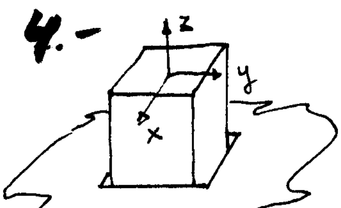
El resto de las componentes de $[T]$ son nulos.

La función de Airy será del tipo: $\phi(x,y) = ax^2 + by^2 + C x \cdot y$

$$\left.\begin{aligned} \rightarrow \sigma_{nx} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 2b \\ \sigma_{ny} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 2a \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} = C = 0 \end{aligned}\right\} \phi(x,y) = 122x^2 + 107y^2$$

(Tens en MPa
x, y en mm)

4.-



Condiciones iniciales (para $F=0$)

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_y = 0, \\ &\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ &\sigma_{nz} = -F/l_x \cdot l_y \\ &\varepsilon_x = 0 \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\varepsilon_x = 0 \Rightarrow \varepsilon_x = 0 = \sigma_{nx} - \nu\sigma_{nz} \Rightarrow \sigma_{nx} = \nu\sigma_{nz} \\ &\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_{nz} - \nu\sigma_{nx}\right] = \frac{\sigma_{nz}(1-\nu^2)}{E} = \frac{-F(1-\nu^2)}{l_x l_y E} \\ &\varepsilon_y = \frac{-\nu}{E}\left[\sigma_{nx} + \sigma_{nz}\right] = \frac{-(\nu+\nu^2)F}{l_x \cdot l_y \cdot E} \end{aligned}$$

Cambian las condiciones cuando $\Delta l_y = 1 = \varepsilon_y \cdot l_y = \frac{-F_1\nu(1+\nu)l_y}{l_x l_y E} \Rightarrow F_1 = \frac{-E \cdot l_x \cdot l_y}{\nu(1+\nu) \cdot l_y} = \underline{-28153N}$

que corresponde a un desplazamiento $\Delta l_z = \varepsilon_z \cdot l_z = -\frac{F_1(1-\nu^2) \cdot l_z}{l_x \cdot l_y \cdot E} = \underline{5{,}42\ mm}$

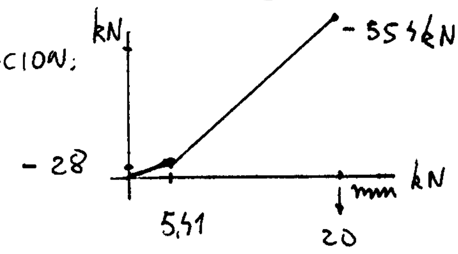
A partir de entonces: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$

$\Rightarrow \sigma_{nz} = \lambda e + 2G\varepsilon_z = \varepsilon_z(\lambda + 2G) = \varepsilon_z\left[\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{1+\nu}\right] = \frac{\varepsilon_z E}{1+\nu}\left[1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\right]$

Además, el recorrido restante será $= 20 - 5{,}42 = 14{,}58$ mm $\Rightarrow \varepsilon_z = \frac{14{,}58}{l_z}$ y $\sigma_{nz} = \frac{-\Delta F}{l_x l_y}$

Por tanto $\Delta F = \frac{14{,}58 \cdot 500}{1{,}48 \cdot 200}\left[1 + \frac{0{,}48}{1-0{,}96}\right] \cdot l_x \cdot l_y$ -525 kN

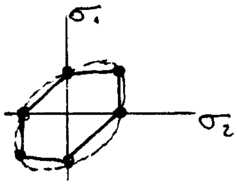
REPRESENTACION:



La fuerza total al final de los 20mm de desplazamiento será: $F_2 = F_1 + \Delta F$

$$\boxed{F_2 = 554\ kN}$$

5.- En un estado tensional plano, podemos ver gráficamente con el hexágono de Tresca y la elipse de Von Mises en qué casos ambos criterios dan la misma seguridad:



Como siempre se mantiene una de las tens. principales > 0 y la 3ª es $= 0$ siempre, sólo se podrán dar 4 casos. Veámoslo analíticamente:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2/2 + \sigma_2^2/2 \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \sigma_1^2 - \sigma_2^2$$

TRESCA = V MISES

si $\sigma_1 = CTE = 120 \longrightarrow \boxed{\sigma_2 = 120 \text{ ó } \sigma_2 = 0 \ (MPa)}$ || Si: $\sigma_2 = CTE = 30 \longrightarrow \boxed{\sigma_1 = 30 \text{ ó } \sigma_1 = 0 \ MPa}$