UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID

E.T.S. DE INGENIEROS INDUSTRIALES

ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES. **CURSO 2.002/2.003**
EXAMEN FINAL DE JUNIO. 1^er SEMESTRE **26.06.2003**

CUESTIONES

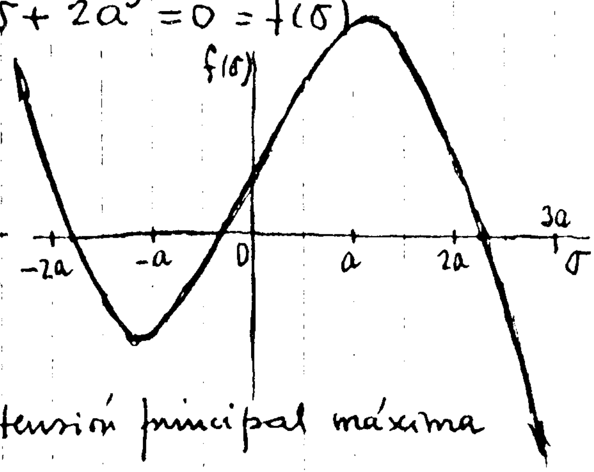
1.- La matriz de tensiones en un punto P de un sólido elástico es: $T = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & -a \end{bmatrix}$
Determinar en el punto P la tensión normal máxima y el plano al que corresponde.

A partir de la matriz de tensiones dada se obtiene de forma inmediata la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a-\sigma & a & a \\ a & -\sigma & a \\ a & a & -a-\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\sigma^3 + 4a^2\sigma + 2a^3 = 0 = f(\sigma)$$

Representando la función $f(\sigma)$

$-\infty$	$-2a$	$-a$	0	a	$2a$	$3a$	∞
$+\infty$	$2a^3$	$-a^3$	$2a^3$	$5a^3$	$2a^3$	$-13a^3$	$-\infty$



La tensión normal máxima pedida es la tensión principal máxima que está comprendida entre 2a y 3a

σ	$2a$	$2{,}1a$	$2{,}2a$	$2{,}3a$	$2{,}21a$	$2{,}22a$	$2{,}214a$	$2{,}215a$
$f(\sigma)$	$2a^3$	$1{,}134a^3$	$0{,}152a^3$	$-0{,}967a^3$	$0{,}046a^3$	$-0{,}061a^3$	$0{,}003a^3$	$-0{,}07a^3$

Se deduce que: $\boxed{\sigma_{n\,máx} = \sigma_1 = 2{,}214a}$

El plano pedido es el dado por el autovector correspondiente a σ_1

$$\left.\begin{aligned} (a-2{,}214a)\alpha + a\beta + a\gamma &= 0 \\ a\alpha - 2{,}214\beta + a\gamma &= 0 \\ a\alpha + a\beta - (a+2{,}214a)\gamma &= 0 \end{aligned}\right\}$$

cuyas soluciones son: $\alpha = 0{,}7558$; $\beta = 0{,}5207$; $\gamma = 0{,}3971$

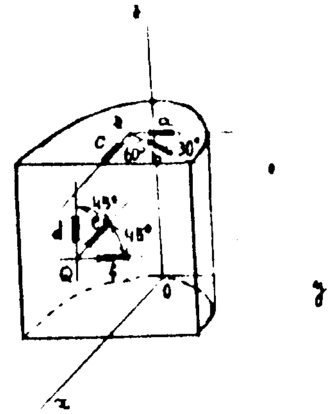
La ecuación de este plano, respecto al sistema de referencia de la matriz dada, es

$$\boxed{0{,}75x + 0{,}52y + 0{,}39z = 0}$$

2.- Un sólido elástico de forma prismática y altura **H** tiene una sección recta semicircular de radio **R**. Sobre las caras superior y anterior se colocan sendas rosetas extensométricas **P** y **Q**, como se indica en la figura.

Sometido el sólido a una solicitación externa se obtienen mediante las galgas extensométricas las siguientes lecturas:
$\varepsilon_a = -k$; $\varepsilon_b = 0$; $\varepsilon_c = 3k$; $\varepsilon_d = \varepsilon_e = -k$,
siendo **k** una constante.

Sabiendo que el estado de deformación creado por la solicitación es un estado homogéneo, calcular la variación de volumen del sólido elástico.



De las lecturas obtenidas se deducen de forma inmediata los valores de las deformaciones longitudinales unitarias según los ejes Oxyz

$$\varepsilon_x = \varepsilon_c = 3k \; ; \; \varepsilon_y = \varepsilon_a = -k \; ; \; \varepsilon_z = \varepsilon_d = -k$$

Por tanto, la dilatación cúbica unitaria es

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = k$$, que es constante

La variación de volumen del sólido elástico considerado será:

$$\boxed{\Delta V = eV = k\,\frac{\pi R^2 H}{2}}$$

3.- Al actuar sobre la cara superior de un cubo de arista **a = 15 cm** una fuerza de compresión **P** repartida uniformemente, la sección recta normal a dicha fuerza pasa a tener un área Ω = 225,0675 cm^2.

Calcular el ángulo que giran las fibras de un cubo idéntico empotrado por su base inferior, cuando se ejerce en su cara superior una fuerza superficial tangencial de valor igual a la tensión tangencial máxima en el cubo anterior.

Datos del material del cubo: **E = 200 GPa ; μ = 1/3**

La longitud del lado de la sección cuadrada del cubo, después de aplicada la fuerza P es: $a' = a - \mu\varepsilon_z . a = a(1-\mu\varepsilon_z)$

y su área Ω $\quad a^2(1-\mu\varepsilon_z)^2 = \Omega \Rightarrow 1-\mu\varepsilon_z = \sqrt{\frac{\Omega}{a^2}} = \sqrt{\frac{225,0675}{225}} = 1,0001$

y de aquí se obtiene: $\quad \varepsilon_z = -3\times 15\times 10^{-5} \Rightarrow \sigma_{nz} = E\varepsilon_z = -90$ MPa

A este estado tensional monoaxial corresponde una

$$\tau_{máx} = \frac{|\sigma_{nz}|}{2} = 45 \text{ MPa}$$

Considerando ahora un cubo idéntico al anterior, a que se aplica en su cara superior una fuerza superficial de valor $\tau = 45$ MPa, el ángulo girado por las fibras paralelas al eje z será, en virtud de la ley de Hooke:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{45 \times 2(1+1/3)}{2 \times 10^5} = \boxed{6 \times 10^{-4} \text{ rad}} = 6 \times 10^{-4} \frac{180}{\pi}{}^{\circ} = \boxed{2'\ 3{,}75''}$$

4.- Una placa rectangular 80 x 40 cm está sometida en su contorno a unas fuerzas superficiales cuyas componentes tangenciales se indican en la figura. Sabiendo que las componentes normales sobre las caras AB y AD son, respectivamente, una tracción de **6 MPa** y una compresión de **20 MPa**, determinar la función de Airy sabiendo que es un polinomio de tercer grado no homogéneo.

Si la función de Airy es un polinomio de 3er grado no homogéneo, será de la forma $\phi = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2$ de la que se deduce la función de tensiones:

$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 2Cx + 6Dy + 2G \\ \sigma_{ny} = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 6Ax + 2By + 2E \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} = -2Bx - 2Cy - F \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones de contorno:

* Para $x=0$: $\sigma_{nx} = 6Dy + 2G - 20 \rightarrow D = 0$; $G = -10$

$\tau_{xy} = -2Cy - F = 0 \rightarrow C = F = 0$

* Para $x = 80$ cm : $\tau_{xy} = -160B = +32 \Rightarrow B = -1/5$

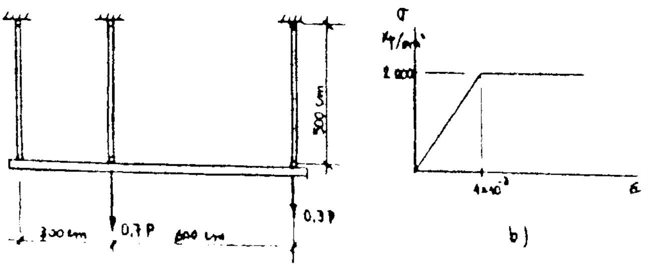
* Para $y=0$: $\sigma_{ny} = 6Ax + 2E = 6 \Rightarrow A = 0$; $E = 3$

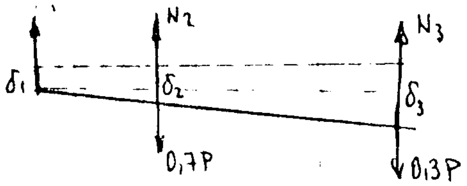
Se obtienen los coeficientes de la función polinómica de Airy pedida:

$$\boxed{\phi = -\frac{1}{5}x^2y + 3x^2 - 10y^2}$$

5.- Una viga horizontal infinitamente rígida cuelga de tres barras iguales de longitud $l = 5$ m y sección de área $\Omega = 2$ cm^2 cada una, como se indica en la figura *a*. Las características del material de las barras se muestran en la figura *b*. Sobre la viga actúa una carga vertical de valor total P, repartida como se muestra en la misma figura *a*.

Calcular esfuerzos, tensiones, deformaciones y alargamientos en cada una de las barras para el valor de la carga P con la que se alcanza la fluencia de una primera barra.





Planteando las ecuaciones de equilibrio

$$\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 = P & (1) \\ 3N_1 + 1{,}8P - 6N_3 = 0 & (2) \end{cases}$$

El sistema es hiperestático de primer grado. La ecuación que complementa a estas dos para determinar las incógnitas es la de compatibilidad de deformaciones

$$\frac{\delta_3 - \delta_1}{9} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{3} \Rightarrow 3\delta_2 - 2\delta_1 - \delta_3 = 0 \Rightarrow 2N_1 - 3N_2 + N_3 = 0 \; (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) constituyen un sistema de ecuaciones cuya solución es:

$$N_1 = 0{,}2571\,P \;;\quad N_2 = 0{,}3144\,P \;;\quad N_3 = 0{,}4285\,P$$

La barra que primero entra en fluencia es la barra 3, lo que se produce cuando

$$0{,}4285\,P = 2000 \times 2 = 4000 \text{ Kp} \Rightarrow P = 9334{,}89 \text{ Kp}$$

Obtenido el valor de P, los valores de los esfuerzos, tensiones, deformaciones y alargamientos pedidos en cada una de las barras, quedan expuestos en el siguiente cuadro

	N Kp	σ Kp/cm²	$\varepsilon \times 10^3$	Δl cm
Barra 1	2400	1200	0,600	0,30
Barra 2	2934	1467	0,733	0,366
Barra 3	4000	2000	1	0,5