ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE
INGENIEROS INDUSTRIALES

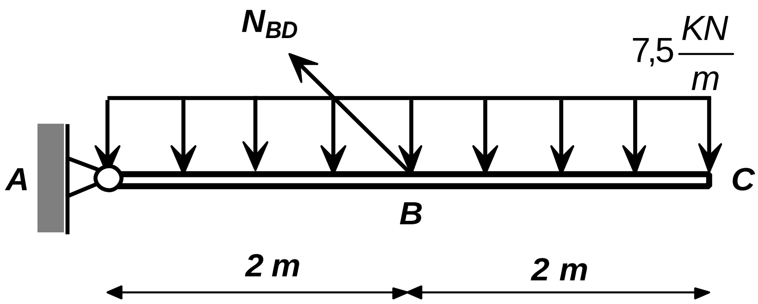
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE
MADRID

ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES **CURSO 2002-03**

EXAMEN DE FEBRERO (2º SEMESTRE) **7-2-2003**

CUESTIONES

1.- Eliminando el cable y sustituyéndolo por su acción sobre la barra, se tiene:



El esfuerzo normal soportado por el cable se obtiene proyectando N_{BD} y aplicando equilibrio de momentos respecto al punto A:

$$\frac{N_{BD}}{\sqrt{2}} \cdot 2\,(m) - 7{,}5\left(\frac{KN}{m}\right) \cdot 4\,(m) \cdot 2\,(m) = 0 \qquad \rightarrow \qquad N_{BD} = 30\sqrt{2} = 42{,}4\,KN \quad \text{(0,5 puntos)}$$

El diámetro mínimo del cable se obtiene imponiendo que la tensión normal soportada sea inferior a la admisible:

$$\frac{N_{BD}}{\frac{p}{4} f^2} \leq s_{adm} \quad \rightarrow \quad f^2 \geq \frac{4\sqrt{2} \cdot 30 \cdot 10^3\,(N)}{p \cdot 140\left(\frac{N}{mm^2}\right)} = 386 \quad \rightarrow \quad f \geq 19{,}7\,mm \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

2.- El módulo resistente es el cociente entre el momento torsor y la tensión tangencial máxima en el perfil. Es por ello una medida de la resistencia a la torsión del perfil, ya que a mayor módulo resistente, menor tensión tangencial máxima para un mismo valor del momento torsor.

$$W_0 = \frac{M_T}{t_{máx}}$$

Para el tubo completo (A) se puede emplear la teoría elemental de la torsión (exacta) o la teoría de perfiles delgados cerrados (aproximada), siendo la diferencia muy pequeña. Para el tubo ranurado (B) hay que emplear la teoría de perfiles delgados abiertos no ramificados.

Perfil (A) por teoría elemental: $t_{máx\,(A)} = \dfrac{M_T}{I_0} R_{ext} \quad \rightarrow \quad W_{0(A)} = \dfrac{I_0}{R_{ext}} = \dfrac{\dfrac{p}{32}\left(f_{ext}^4 - f_{int}^4\right)}{\dfrac{f_{ext}}{2}}$

$$W_{0(A)} = \frac{p\left(22^4 - 20^4\right)\left(mm^4\right)}{11(mm)} = 662{,}7\,mm^3 \qquad\qquad (0{,}5 \text{ puntos})$$

Perfil delgado abierto (B): $t_{máx\,(B)} = \dfrac{3M_T}{se^2} \quad \rightarrow \quad W_{0(B)} = \dfrac{se^2}{3} = \dfrac{\left(p \cdot f_{medio} - ancho\ ranura\right) \cdot e^2}{3}$

$$W_{0(B)} = \frac{\left(p \cdot 21 - 3\right) \cdot 1^2}{3} = 21\,mm^3$$

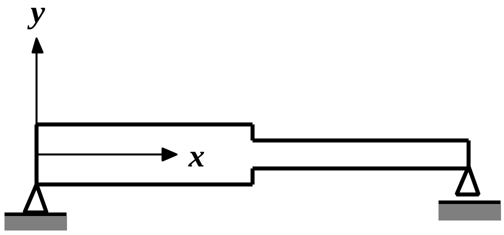
$$\frac{W_{0(A)}}{W_{0(B)}} = 31{,}6 \qquad\qquad (0{,}5 \text{ puntos})$$

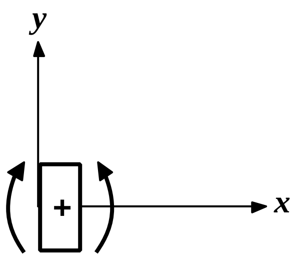
3.- a.- Los dos tramos de la viga se dimensionan para que al soportar los momentos flectores máximos relativos (distintos en cada tramo), no se supere la tensión admisible:

$$\frac{M_{Fmáx}}{W} \le s_{adm} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} W_{0-2m} \ge \dfrac{10 \cdot 10^6\,(N \cdot mm)}{140\left(\dfrac{N}{mm^2}\right)} = 71429\,mm^3 \equiv 71{,}4\,cm^3 \quad \rightarrow \quad IPE\ 140 \\[2ex] W_{2-4m} \ge \dfrac{7}{10} \cdot 71{,}4\,cm^3 = 50\,cm^3 \quad \rightarrow \quad IPE\ 120 \end{cases}$$

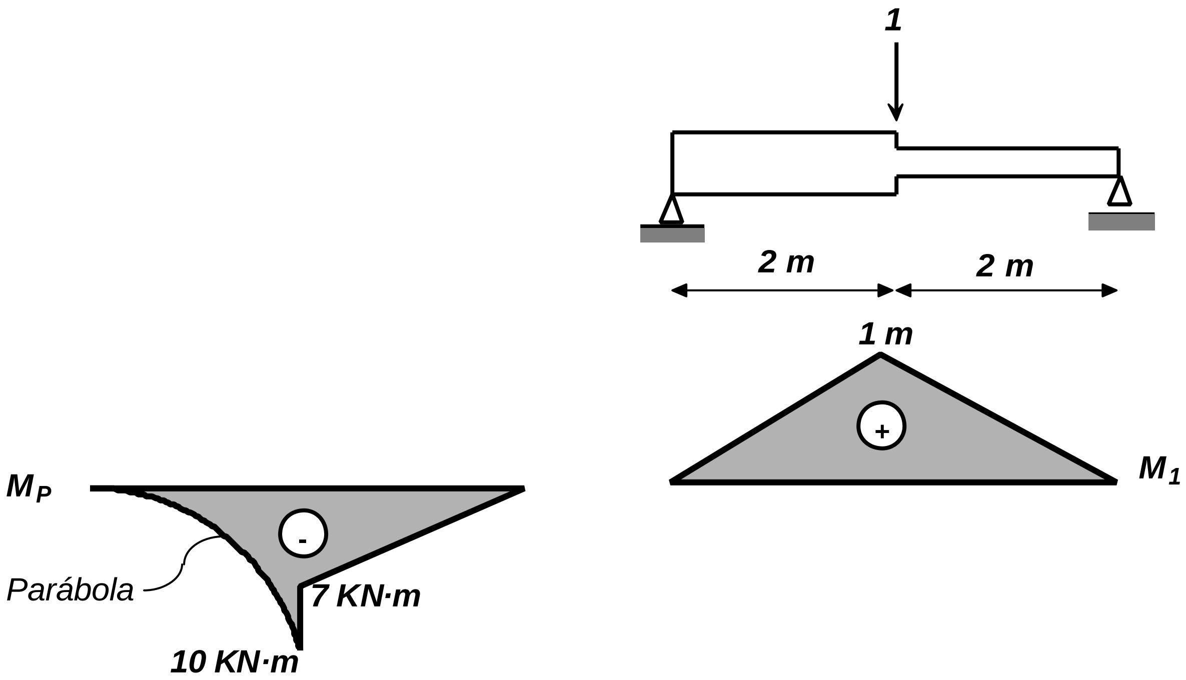
(1 punto)

b.- El método más rápido para el cálculo del desplazamiento es el de la carga unitaria. Se escoge como sistema de referencia y criterio de signos el de la figura.





Los diagramas del sistema real y el virtual son los siguientes:



La expresión del desplazamiento (positivo si va según la carga 1, es decir, “hacia abajo”), es:

$$d = \frac{1}{EI_{IPE140}}\int_0^{2m} M_P \cdot M_1 dx + \frac{1}{EI_{IPE120}}\int_{2m}^{4m} M_P \cdot M_1 dx$$

Las integrales se calculan por el método de multiplicación de gráficos:

$$d = \frac{1}{EI_{IPE140}}\left(\frac{1}{3}\cdot(-10)(kN\cdot m)\cdot 2(m)\cdot\frac{3}{4}(m)\right) + \frac{1}{EI_{IPE120}}\left(\frac{1}{2}\cdot(-7)(kN\cdot m)\cdot 2(m)\cdot\frac{2}{3}(m)\right)$$

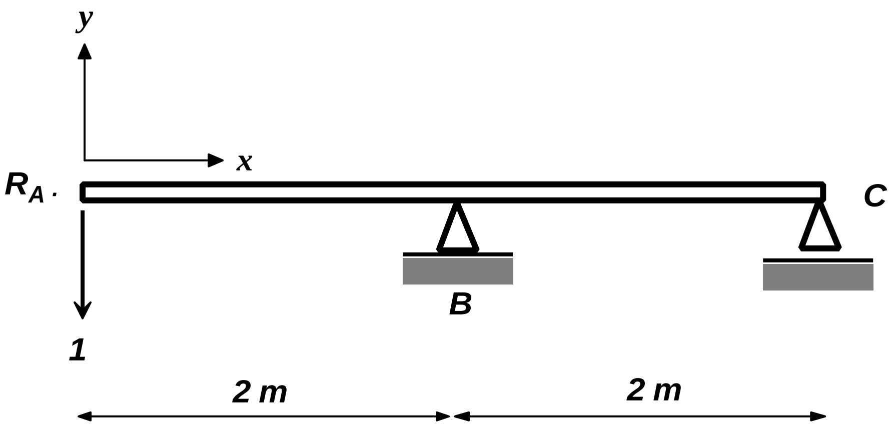
Operando:

$$d = \frac{-5\cdot 10^{12}\left(N\cdot mm^3\right)}{2{,}1\cdot 10^5\left(\frac{N}{mm^2}\right)\cdot 541\cdot 10^4\left(mm^4\right)} + \frac{-\frac{14}{3}\cdot 10^{12}\left(N\cdot mm^3\right)}{2{,}1\cdot 10^5\left(\frac{N}{mm^2}\right)\cdot 318\cdot 10^4\left(mm^4\right)} = -11{,}4\,mm$$

La sección asciende, dado que el resultado es negativo. (2 puntos)

Otro método válido para su empleo directo (aunque laborioso) es el de la viga conjugada. El segundo teorema de Mohr no aporta directamente el desplazamiento, dado que no existe un punto de tangente horizontal conocida. Los métodos de la ecuación diferencial y universal de la deformada son de aplicación laboriosa, dado que existen dos tramos de distinta rigidez.

4.- La viga es hiperestática de grado 1. Empleando el método de las fuerzas, la viga equivale a:

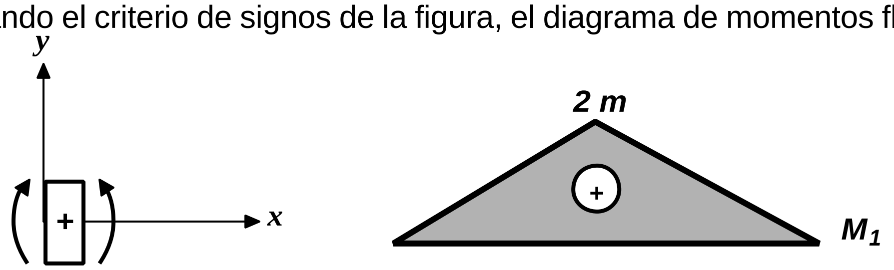


Junto con la condición de contorno v(x = 0) = -20 mm, que si se expresa en la forma $R_A \cdot \delta_{11}$ = 20 mm es la denominada "ecuación canónica" (pero con $\Delta_{1P} = 0$, dado que no existen cargas aplicadas y con el movimiento de A no nulo, ya que éste es el valor del asiento). (1 punto)

Para determinar la reacción en A, basta calcular el desplazamiento con alguno de los métodos conocidos. Si se emplea el método de la carga unitaria, el desplazamiento es:

$$d_{11} = \int_0^{4m} \frac{M_1 M_1}{EI}\, dx$$

Empleando el criterio de signos de la figura, el diagrama de momentos flectores es:



Calculando la integral por el método de multiplicación de gráficos (dividiéndola en otras dos integrales):

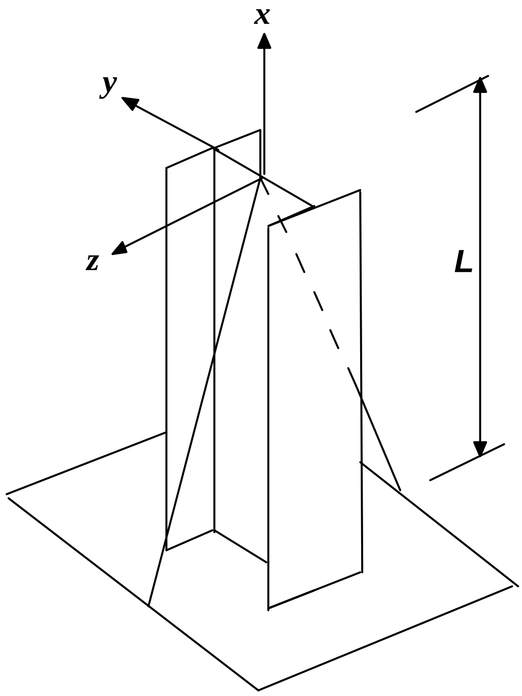
$$d_{11} = \frac{1}{2{,}1 \cdot 10^5 \left(\frac{N}{mm^2}\right) \cdot 318 \cdot 10^4 \left(mm^4\right)} \cdot 2\left(\frac{1}{2} 2 \cdot 10^3 (mm) \cdot 2 \cdot 10^3 (mm) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 10^3 (mm)\right)$$

$$d_{11} = 7{,}99 \cdot 10^{-3} \left(\frac{mm}{N}\right)$$

Por tanto, despejando:

$$20 (mm) = R_A \cdot d_{11} \quad \rightarrow \quad R_A = \frac{20 (mm)}{7{,}99 \cdot 10^{-3} \left(\frac{mm}{N}\right)} = 2504\, N$$ (2 puntos)

5.- Se elige como sistema de referencia el de la figura.



Los cables impiden el desplazamiento de la punta según el eje z, pero no los giros. Así, las condiciones de sustentación son diferentes en los planos xy y xz, y hay que analizar previamente en cual de ellos se produce el pandeo (el de esbeltez máxima). Este plano será el que limite la altura.

Plano xy (Empotrado-libre): $$\lambda_{xy} = \frac{L_{p(xy)}}{i_z} \rightarrow \lambda_{xy} = \frac{2L\,(cm)}{5{,}73\,(cm)} = 0{,}35\,L \text{ (L en cm)}$$

Plano xz (Empotrado-articulado): $$\lambda_{xz} = \frac{L_{p(xz)}}{i_y} \rightarrow \lambda_{xz} = \frac{0{,}7L\,(cm)}{3{,}52\,(cm)} = 0{,}2\,L$$

El pandeo se produce en el plano xy. (1 punto)

Dado que se conoce el tipo de acero y su tensión admisible, se emplea el método de cálculo de los coeficientes ω, método más seguro que la fórmula de Euler.

$$\omega\frac{N}{\Omega} \le \sigma_{adm} \rightarrow \omega \le \frac{140\left(\frac{N}{mm^2}\right)\cdot 31{,}4\cdot 10^2\,(mm^2)}{147\cdot 10^3\,(N)} = 2{,}99$$

Entrando en las tablas del acero A-42, y trabajando del lado de la seguridad, la esbeltez máxima admisible será $\lambda_{máx}$ = 128. Sustituyendo y despejando se obtiene:

$$\lambda_{xy\,máx} = 0{,}35\,L = 128 \rightarrow L_{máx} = 367\,cm$$ (1 punto)