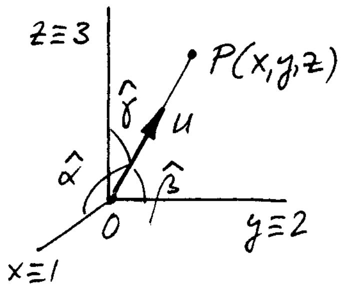
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES (PLAN 76) CURSO 2.003/04
EXAMEN FINAL DE JUNIO. PRIMER SEMESTRE 18.06.2004

CUESTIONES

1. Determinar la ecuación del cono engendrado por las normales a los planos en los que σ_n tiene un valor constante, respecto al sistema de ejes principales $Oxyz$. Particularizar para el caso $\sigma_n = \sigma_1$, justificando el resultado obtenido.
(2 puntos)



La ecuación paramétrica del lugar será:

$$x = \lambda\alpha \;;\; y = \lambda\beta \;;\; z = \lambda\gamma$$

verificándose, al ser los ejes principales,

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_1\alpha^2 + \sigma_2\beta^2 + \sigma_3\gamma^2 = \sigma_n \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{array}\right.$$

Sustituyendo los cosenos directores y eliminando λ, obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1\frac{x^2}{\lambda^2} + \sigma_2\frac{y^2}{\lambda^2} + \sigma_3\frac{z^2}{\lambda^2} = \sigma_n \\ \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} + \frac{z^2}{\lambda^2} = 1 \end{array}\right\} \quad \sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = \sigma_n(x^2+y^2+z^2)$$

$$(\sigma_1-\sigma_n)x^2 + (\sigma_2-\sigma_n)y^2 + (\sigma_3-\sigma_n)z^2 = 0$$

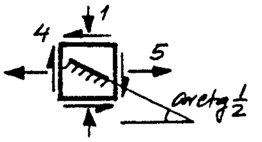
que para un valor dado de σ_n es la ecuación de un cono cuádrico. En el caso de que $\sigma_n = \sigma_1$, el cono degenera en el producto de dos planos

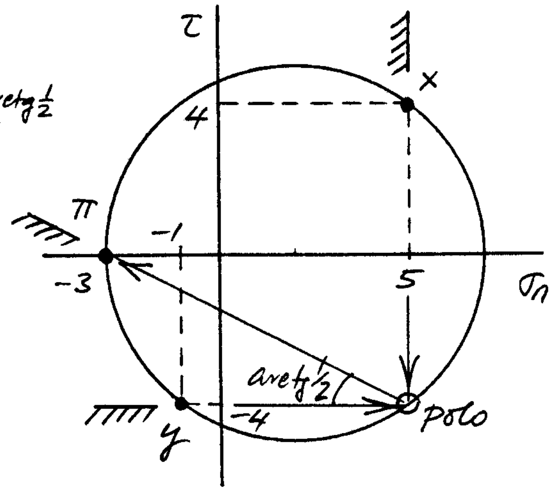
$$(\sigma_2-\sigma_1)y^2 + (\sigma_3-\sigma_1)z^2 = 0$$

y como $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, son dos planos imaginarios, cuya recta de intersección $y = z = 0$ es real. Lógicamente se trata del eje principal 1.

---

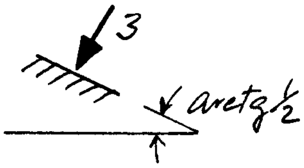
2. En el círculo de Mohr de un estado plano se denomina "polo" a un punto del círculo con la siguiente propiedad: Si desde él trazamos una recta paralela a la traza de un plano cualquiera, su intersección con el círculo es el punto representativo del estado tensional de dicho plano.
Se pide dibujar el círculo de Mohr del estado de la figura, posicionando el polo, y a partir de él obtener las componentes intrínsecas del vector tensión del plano cuya traza se indica, representándolas gráficamente.
(2 puntos)





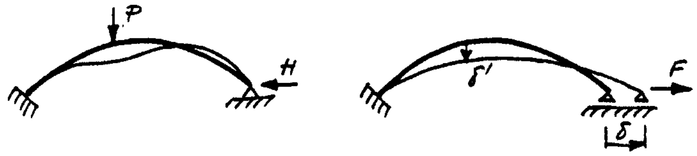
Situamos en el diagrama de Mohr los puntos representativos de los planos coordenados (eje x, horizontal; eje y, vertical): (5,4) y (−1,−4) respectivamente.

Desde ellos levantamos rectas paralelas a sus trazas, y su punto de intersección será el polo $(5,-4)$.
Desde el polo levantamos una recta paralela a la traza del plano indicado, obteniendo su punto representativo $(-3, 0)$.



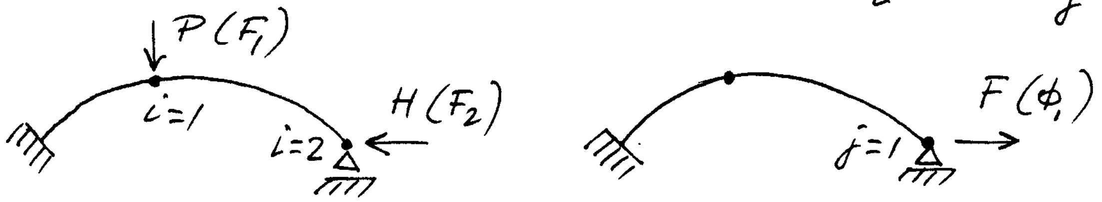
---

3. Para determinar experimentalmente las reacciones en una estructura hiperestática, se puede utilizar el método de Beggs, tal como se indica en el caso siguiente.
Se trata de un arco, empotrado en su extremo izquierdo y con un apoyo fijo en el derecho, sometido a la fuerza *P*. Para determinar la reacción horizontal *H* en el apoyo, retiramos la fuerza aplicada y liberamos el apoyo en dirección horizontal. Seguidamente imponemos en el apoyo un desplazamiento δ mediante la aplicación de una fuerza *F*, y en el punto donde estaba aplicada la fuerza *P* medimos un desplazamiento δ' en su dirección.
A partir de los valores de P, δ y δ', se pide obtener el valor de *H*.
(3 puntos)



Se dan dos resoluciones distintas

1) Aplicando el Teorema de Maxwell-Betti : $\sum_i F_i \lambda'_i = \sum_j \phi_j \mu'_j$

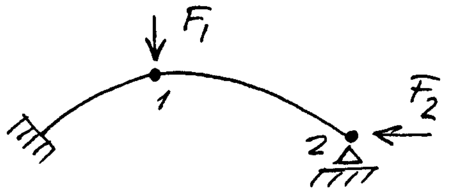


$\mu'_1 = 0$ $\qquad$ $\begin{cases} \lambda'_1 = \delta' \\ \lambda'_2 = -\delta \end{cases}$

1.er sistema : F_1, F_2 $\qquad$ 2.º sistema : ϕ_1

Sustituyendo : $P\delta' - H\delta = F \cdot 0 \longrightarrow H = P\dfrac{\delta'}{\delta}$

2) Mediante los coeficientes de influencia



$$\begin{cases} \delta_1 = \delta_{11} F_1 + \delta_{12} F_2 \\ \delta_2 = \delta_{21} F_1 + \delta_{22} F_2 \end{cases} \quad \text{siendo } \delta_{12} = \delta_{21}$$

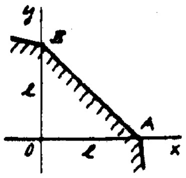
- Si $F_1 = P$; $F_2 = H$ $\qquad \delta_2 = 0 = \delta_{12} P + \delta_{22} H$
- Si $F_1 = 0$; $F_2 = -F$ $\qquad \left| \begin{array}{l} \delta_1 = \delta' = 0 - \delta_{12} F \\ \delta_2 = -\delta = 0 - \delta_{22} F \end{array} \right.$

$$\Bigg\} \; H = P\frac{\delta'}{\delta}$$

4. La función de Airy en una placa de contorno poligonal sometida a un estado plano, sin fuerzas de volumen, es:

$\Phi = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ (MN para x, y en m)

Se pide determinar las fuerzas de superficie que actúan sobre el lado AB en dirección normal y tangencial.
(2 puntos)



$$\begin{cases} \sigma_{nx} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 6x + 6y \\ \sigma_{ny} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 6x + 6y \\ \tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -6x - 6y \end{cases}$$

La ecuación del lado AB es: $\frac{x}{l} + \frac{y}{l} = 1 \rightarrow \vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

Las fuerzas sobre el lado serán:

$$[f_s] = [T][n] = \begin{pmatrix} 6l & -6l \\ -6l & 6l \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ MPa } (l \text{ en m})$$

Así pues se trata de un borde libre: $(f_s)_n = (f_s)_t = 0$

5. Un material frágil tiene como tensiones de rotura $\sigma_{rt} = 10$; $\sigma_{rc} = 100$ MPa. Determinar los valores de σ_1 para que el estado tensional: $\sigma_1 > \sigma_2 = -10 > \sigma_3 = -20$ MPa, tenga un coeficiente de seguridad $5 > n > 2$ según el criterio de Mohr.
(1 punto)

Tensión equivalente: $\sigma_{ef} = \sigma_1 - k\sigma_3$ $k = \frac{\sigma_{rt}}{\sigma_{rc}}$

$\sigma_{ef} = \sigma_1 - \frac{10}{100}(-20) = \sigma_1 + 2$ MPa.

$n \cdot \sigma_{ef} = \sigma_{rt}$ | $5 \cdot (\sigma_1 + 2) = 10 \rightarrow \sigma_1 = 0$ MPa
$2 \cdot (\sigma_1 + 2) = 10 \rightarrow \sigma_1 = 3$ "

Así pues: $3 > \sigma_1 > 0$ MPa