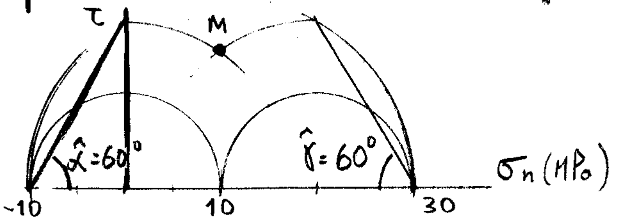
ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES (PLAN 76).
EXAMEN DE SEPTIEMBRE

24/SEP/04

(1.) $[\bar{\sigma}] = [T]\cdot[\vec{u}] \Rightarrow \sigma_x = \alpha\cdot\sigma_1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha = \sigma_x/\sigma_1 = \frac{15}{30} \Rightarrow \hat{\alpha} = 60^\circ \\ \beta = \sigma_y/\sigma_2 \rightarrow \hat{\beta} = 45^\circ \\ \gamma = \sigma_z/\sigma_3 \rightarrow \hat{\gamma} = 60^\circ \end{cases}$$

Conocidos los ángulos de la dirección pedida, se sitúa el punto representativo en el diagrama. M.



(2.) $\varepsilon_y = \varepsilon_a = 6\cdot 10^{-4}$ En general $\varepsilon = \varepsilon_x\alpha^2 + \varepsilon_y\beta^2 + \gamma_{xy}\alpha\beta$ al ser un estado plano. Por tanto

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_b &= \tfrac{3}{4}\,\varepsilon_x + \varepsilon_y\tfrac{1}{4} - \gamma_{xy}\tfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \varepsilon_c &= \tfrac{3}{4}\,\varepsilon_x + \varepsilon_y\tfrac{1}{4} + \gamma_{xy}\tfrac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}\right\} \gamma_{xy} = 0 \Rightarrow x, y$$

DIRECCIONES PRINCIPALES

Además

$\varepsilon_b + \varepsilon_c = 4\cdot 10^{-4} = \frac{3}{2}\varepsilon_x + 3\cdot 10^{-4} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{2}{3}\cdot 10^{-4} = \varepsilon_2$

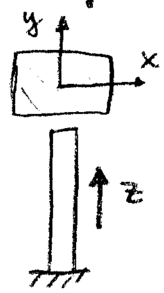
a) $\boxed{\begin{aligned} 1 &\equiv y.\ \varepsilon_1 = \varepsilon_a = 6\cdot 10^{-4} \\ 2 &\equiv x.\ \varepsilon_2 = \varepsilon_x = \tfrac{2}{3}\cdot 10^{-4} \end{aligned}}$

b) Al ser una superf libre $\rightarrow \sigma_{nz} = 0$

Además $\underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y}_{>0} = \underbrace{\frac{1}{E}}_{>0}\left[\sigma_{nx} + \sigma_{ny}\right]\underbrace{(1-\mu)}_{>0} \Rightarrow \sigma_{nx} + \sigma_{ny} > 0$

y como $\boxed{\varepsilon_z} = \underbrace{\frac{1}{E}}_{>0}\left(-\mu\,\underbrace{(\sigma_{nx} + \sigma_{ny}}_{>0}\right)\ \boxed{<0}$

(3.) Definimos unos ejes: Entonces $\boxed{\sigma_{nz}} = -30\,kN/180\times 280 = \boxed{-0{,}595\,MPa}$



No hay tensiones cortantes, luego los direcciones principales son x, y, z

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 0 = \sigma_{nx} - \mu(\sigma_{ny} + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = 0 = \sigma_{ny} - \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{nz}) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sigma_{nx}(1+\mu) = \sigma_{ny}(1+\mu) \Rightarrow \sigma_{nx} = \sigma_{ny}$

Además sustituyendo, resulta $0 = \sigma_{nx}(1-\mu) - \mu\sigma_{nz} \Rightarrow \boxed{\sigma_{nx}} = \frac{\mu\sigma_{nz}}{1-\mu} = \boxed{-0{,}198\,MPa}$

Con todo ello $\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_{nz} - \mu(\sigma_{nx} + \sigma_{ny})\right] = -1{,}24\cdot 10^{-5}$

Por tanto $\boxed{\Delta l} = l\cdot\varepsilon_z = 2\cdot 10^3\cdot -1{,}24\cdot 10^5 = \boxed{-2{,}48\cdot 10^{-2}\,mm}$

4. PLAN 76 La función de Airy será del tipo $\phi = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{nx} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 2Cx + 6Dy + 2G \\ \sigma_{ny} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 6Ax + 2By + 2E\end{aligned}\right\}$$

Para que haya equilibrio en el eje y tiene que haber una fuerza de volumen: $Y = \frac{16\ \text{MPa} \cdot \Omega}{\text{Vol}}$

$\boxed{X=0}$, $\boxed{Y} = -16 \cdot 50 \times 2 / 100 \times 50 \times 2 = \underline{-0{,}16\ \text{N mm}^{-3}}$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} - X_y - Y_x = -2Bx - 2Cy - F - Yx$$

$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ $\tau_{xy} = \underline{0 = F}$ // $\sigma_{ny} = -20 \Rightarrow \underline{E = -1}$

$\sigma_{nx} = -30 = 2G \Rightarrow \underline{G = -15}$

$x=0,\ y=50 \to \tau_{xy} = \underline{0 = C}$

$x=100,\ y=0 \to \tau_{xy} = 16 \Rightarrow \underline{B=0}$

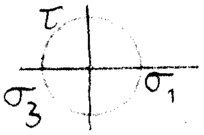
$x=1,\ y=0 \to \sigma_{ny} = -20 = 6A - 20 \Rightarrow \underline{A=0}$

$x=0,\ y=1 \to \sigma_{nx} = -30 = 6D - 30 \Rightarrow \underline{D=0}$

$\Rightarrow \boxed{\phi(x,y) = -10x^2 - 15y^2 \ \text{MPa}}$ para x, y en mm.

5. El test de cortadura viene definido por el siguiente estado tensional:

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix}$$



Además, en el momento de la rotura $\sigma_{eq} = \sigma_{et}$

por tanto $\sigma_{eq} = \sigma_{et} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{et}}{|\sigma_{ec}|}\sigma_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\sigma_{ec}| = \frac{\sigma_{et} \cdot \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_{et}} = 533\ \text{MPa} \Rightarrow \boxed{\sigma_{ec} = -533\ \text{MPa}}$$

Una resolución gráfica es válida igualmente