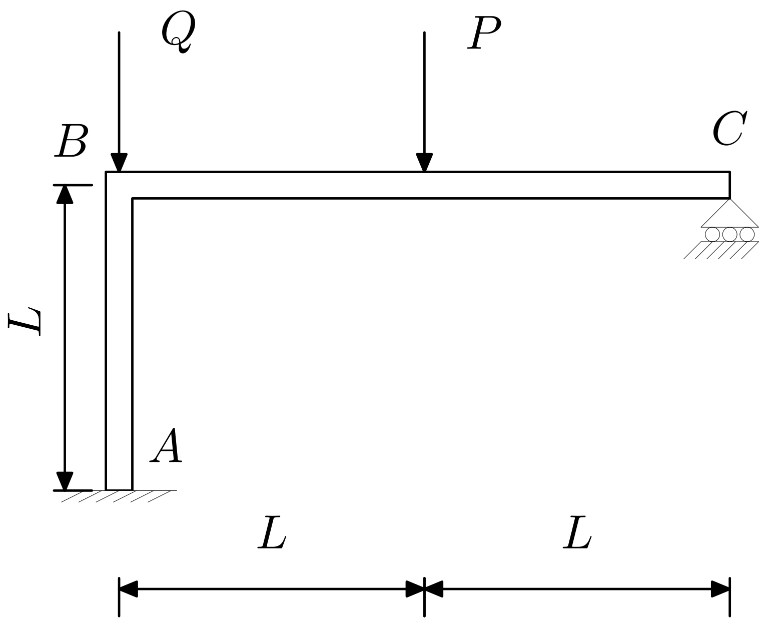
Fecha de publicación de la preacta: 12/2/2010
Fecha de revisión del examen: 22/2/2010

PROBLEMA 1 (10 puntos)

El semipórtico de la figura está sometido a dos cargas verticales $P = 4000$ N y Q, ésta última de módulo desconocido pero con la dirección y sentido que se indican. ¿Cuál es el valor mínimo de Q para que la columna AB no sufra tensiones de tracción? (Datos: todas las secciones son cuadradas de lado 100 mm, $E = 30$ GPa, $L = 1$ m. Se desprecian las deformaciones axiales y de cortante.)



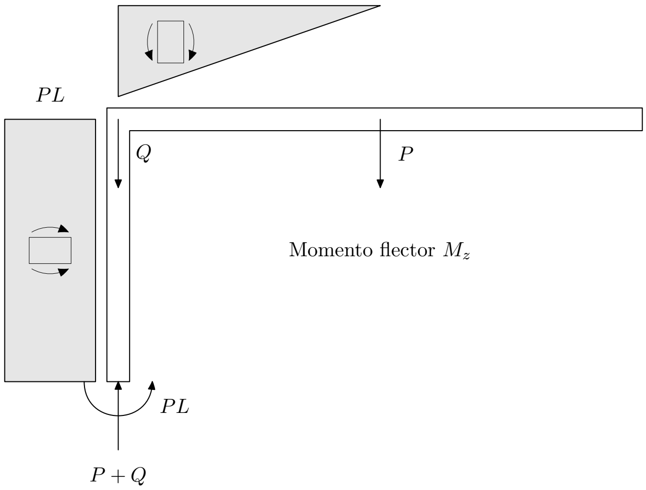
SOLUCIÓN

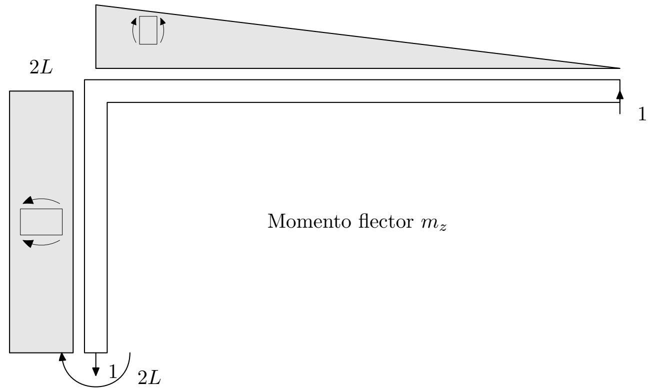
Para conocer el estado tensional en todas las secciones de la columna AB obtenemos primero las leyes de esfuerzos en todos los miembros del semipórtico. Después estudiamos las tensiones en AB, que está sometido a flexión compuesta y escogemos el mínimo valor de Q que anule todas las tensiones de tracción debidas a la flexión en la columna.

1. Cálculo de las reacciones

El semipórtico es hiperestático, con grado de hiperestaticidad igual a 1. Escogemos como reacción hiperestática la reacción vertical del apoyo C, estudiando el desplazamiento en C en un pórtico isostático auxiliar en el cual el apoyo hiperestático se reemplaza por una fuerza vertical R de valor desconocido.

Para encontrar el valor R imponemos que el desplazamiento vertical en C es nulo, y para hallar este último emplemamos el método de la carga unitaria. En la siguiente figura se dibujan los diagramas de esfuerzos flectores en el pórtico auxiliar bajo la cargas exteriores P y Q (en la izquierda) y bajo una fuerza unitaria en la dirección de la reacción desconocida (en la derecha).





Se observa en la figura de la izquierda que la fuerza de compresión Q no crea momento flector en ningún miembro. Como sólo intervienen deformaciones por flexión la energía elástica del sistema es:

$$U = \int \frac{1}{EI}(M_z(x) + R \cdot m_z(x))\,\mathrm{d}x \ .$$

Obtenemos el valor de R imponiendo que el deplazamiento vertical en C es nulo, es decir

$$\delta_c = \frac{\partial U}{\partial R} = 0 \ .$$

Operando en la expresión de la energía interna obtenemos:

$$R = -\frac{\int M_z(x)\ m_z(x)\,\mathrm{d}x}{\int m_z^2(x)\,\mathrm{d}x} = -\frac{(-PL)(2L)L + \int_0^L P(x-L)(2L-x)\,\mathrm{d}x}{(2L)(2L)L + \int_0^{2L}(2L-x)^2\,\mathrm{d}x} = \frac{17}{40}P = 1700\ \mathrm{N}\ .$$

Se comprueba también en este resultado que el valor de la reacción en C es independiente del valor de Q.

2. Esfuerzos internos en la columna AB

La columna AB está sometida a flexión compuesta. El esfuerzo axial es constante y tiene por valor $N = R - P - Q = -23/40\,P - Q$. La flexión también es constante de valor $M_z = -PL + 2LR = -3/20\,PL$, por lo tanto todas las secciones de la columna están igual de solicitadas.

3. Selección de Q

Debido a la flexión compuesta de la viga AB, todas las secciones tienen tensiones normales de valor

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z}y = \frac{-23/40\,P - Q}{A} + \frac{3/20\ PL}{I_z}y \ .$$

En la expresión anterior, $A = 10^4$ mm^2, $I_z = 10^8/12$ mm^4, $L = 1000$ mm, $-50 \leq y \leq 50$ mm. Si, como se indica en el enunciado, no debe de haber tensiones de tracción en ningún punto de la columna, se debe de cumplir $\sigma_x \leq 0$, y operando obtenemos para $y = 50$ mm

$$-0{,}23 + 3{,}6 - \frac{Q}{10^4} \leq 0 \Leftrightarrow Q \geq 33{,}7\ \mathrm{KN}$$