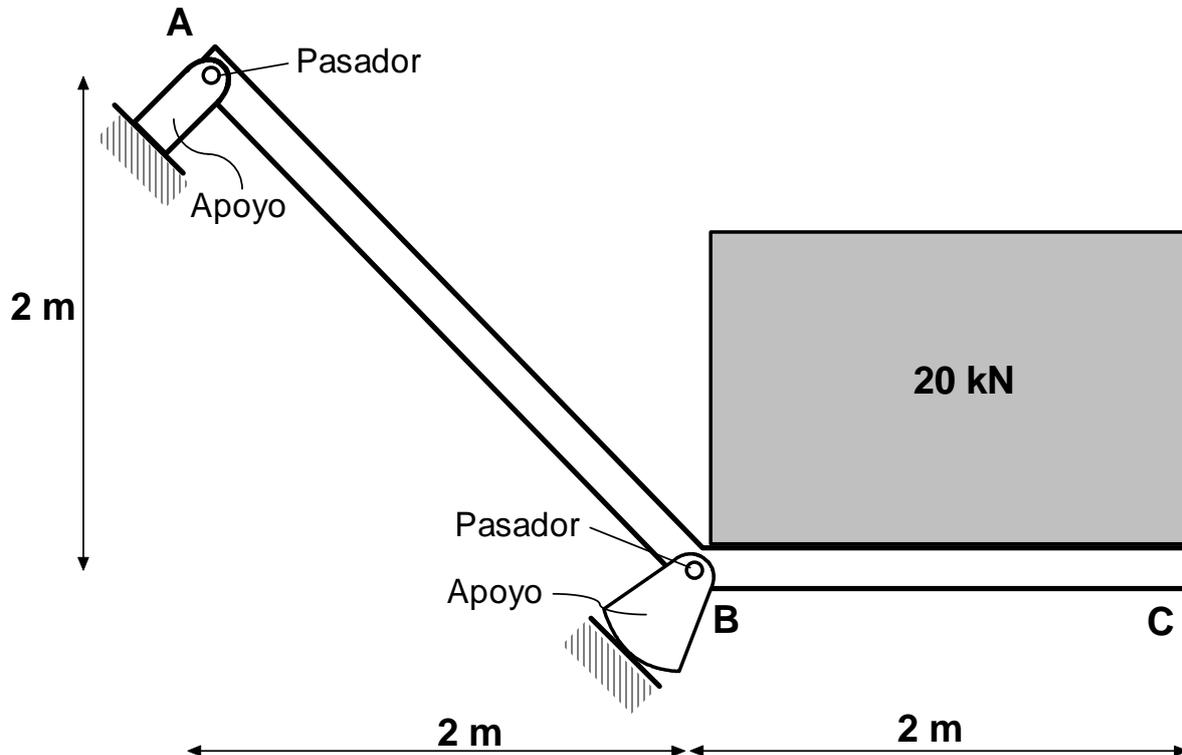


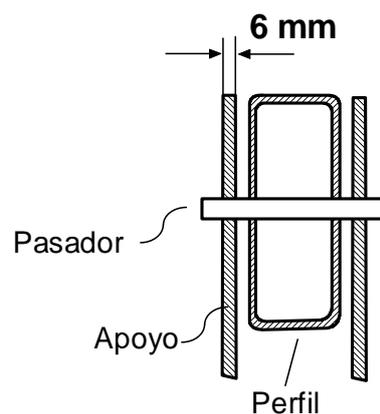
Fecha de publicación de la preacta: 12 de Febrero
Fecha de revisión: 22 de Febrero

PROBLEMA 2 (5 puntos)

En la estructura de la figura siguiente, todos los contactos se consideran exentos de rozamiento.



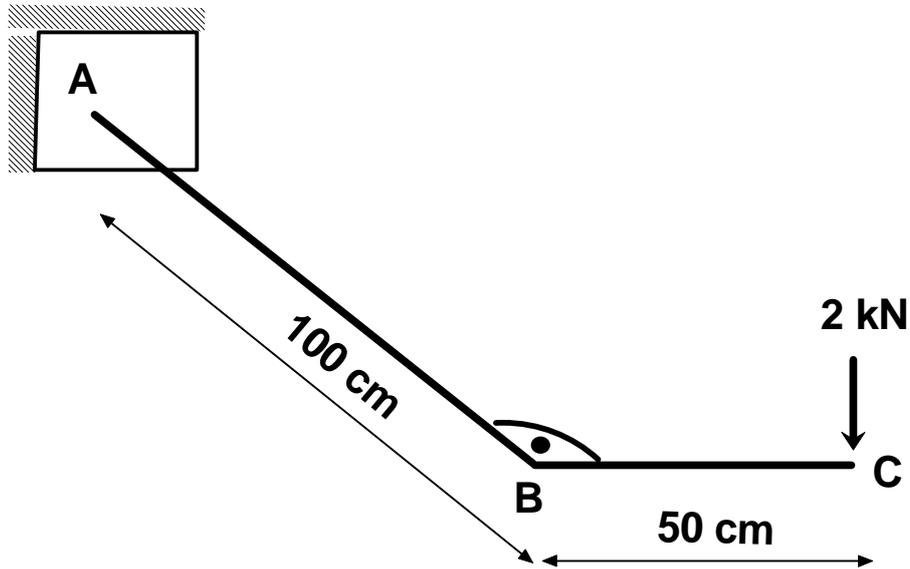
La disposición constructiva de los apoyos es la de la figura siguiente.



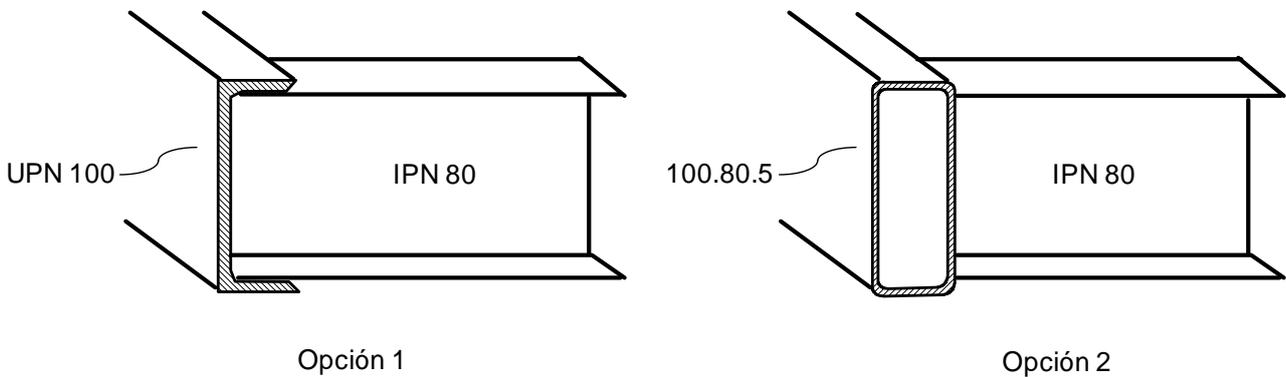
Determine el perfil hueco rectangular normalizado más ligero que debe formar la estructura y el diámetro mínimo de los pasadores (iguales) A y B, en un número entero de milímetros, para garantizar que no plastifica ninguno de los elementos de la misma ($\sigma_{adm} = 275 \text{ MPa}$, $\tau_{adm} = 150 \text{ MPa}$).

PROBLEMA 3 (5 puntos)

En la figura siguiente puede ver el esquema de barras, representadas por su línea media, de una estructura.



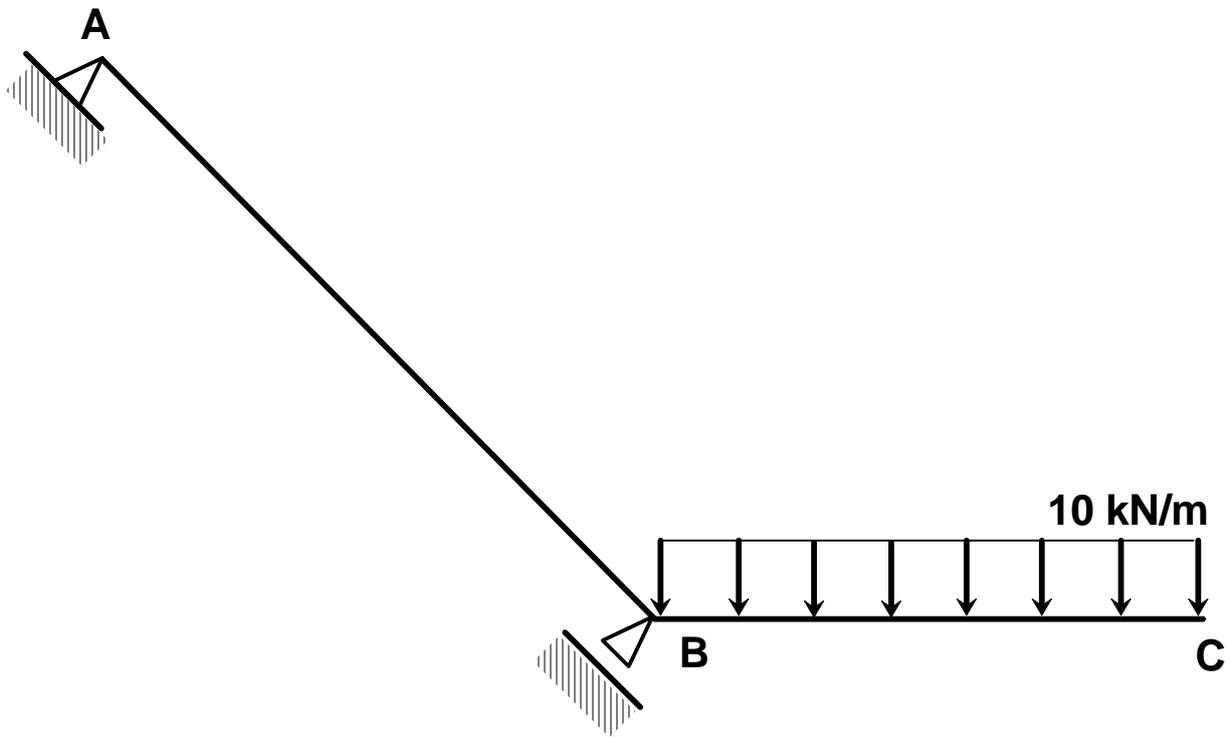
En la figura siguiente se muestra el detalle de B, con las dos opciones que se barajan para la barra AB.



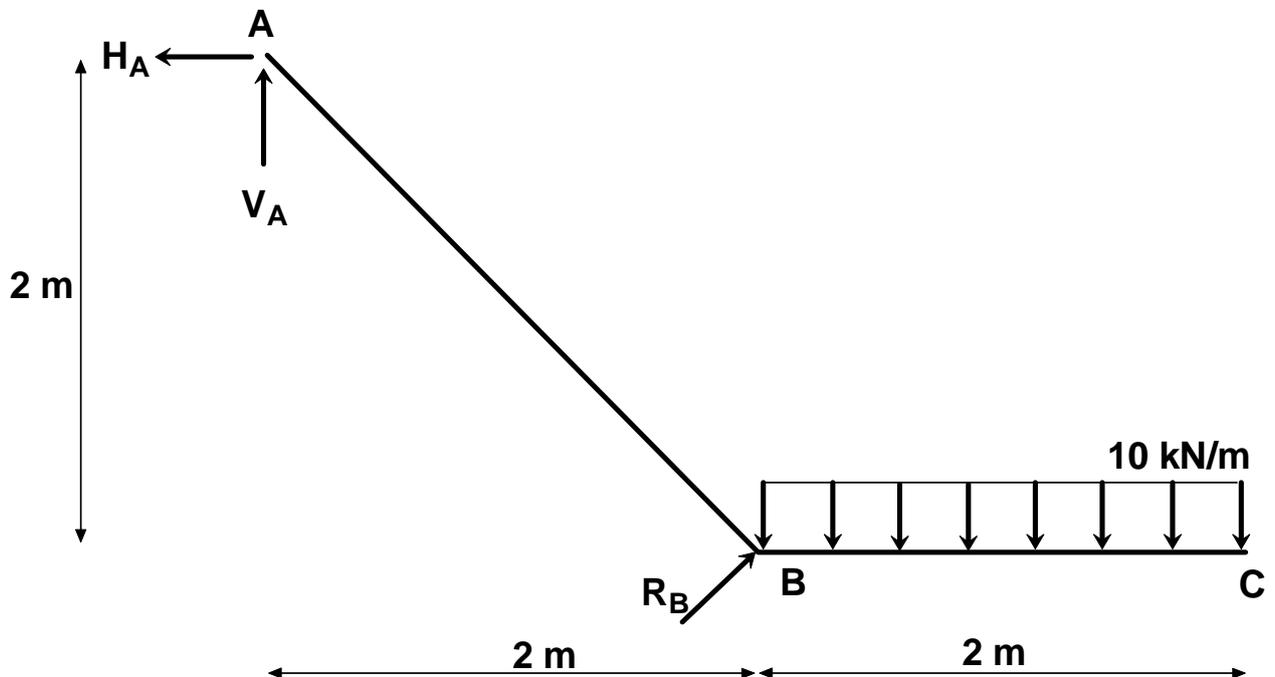
Despreciando tanto la distancia entre el centro de gravedad y el centro de torsión en el perfil UPN como los efectos de los esfuerzos cortantes, determine la reducción en el desplazamiento del punto C que se consigue al emplear la opción 2 en lugar de la 1 ($E = 210 \text{ GPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$).

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA 2

El esquema de barras de la estructura es el siguiente.



El conjunto de fuerzas sobre la estructura queda:



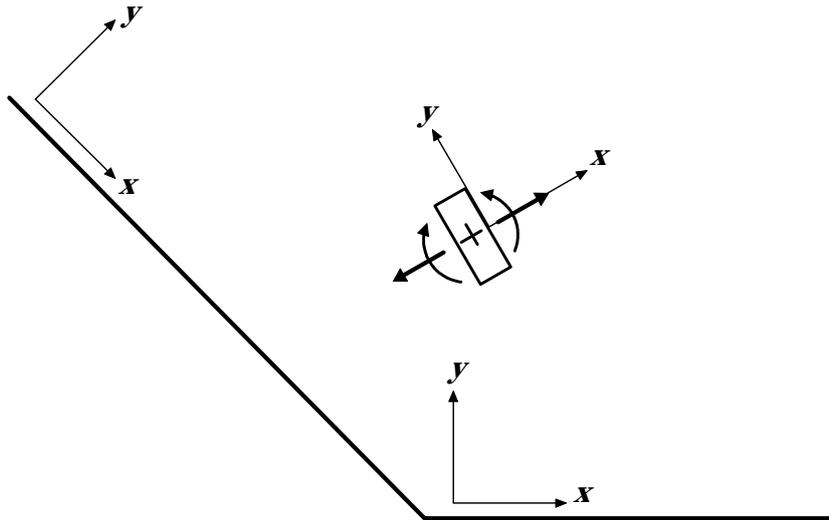
De la aplicación de las ecuaciones de equilibrio se obtienen las reacciones:

$$\sum M_{(A)} = 0 \rightarrow 20(kN) \cdot 3(m) - R_B \cdot 2\sqrt{2}(m) = 0 \rightarrow R_B = 15\sqrt{2}kN$$

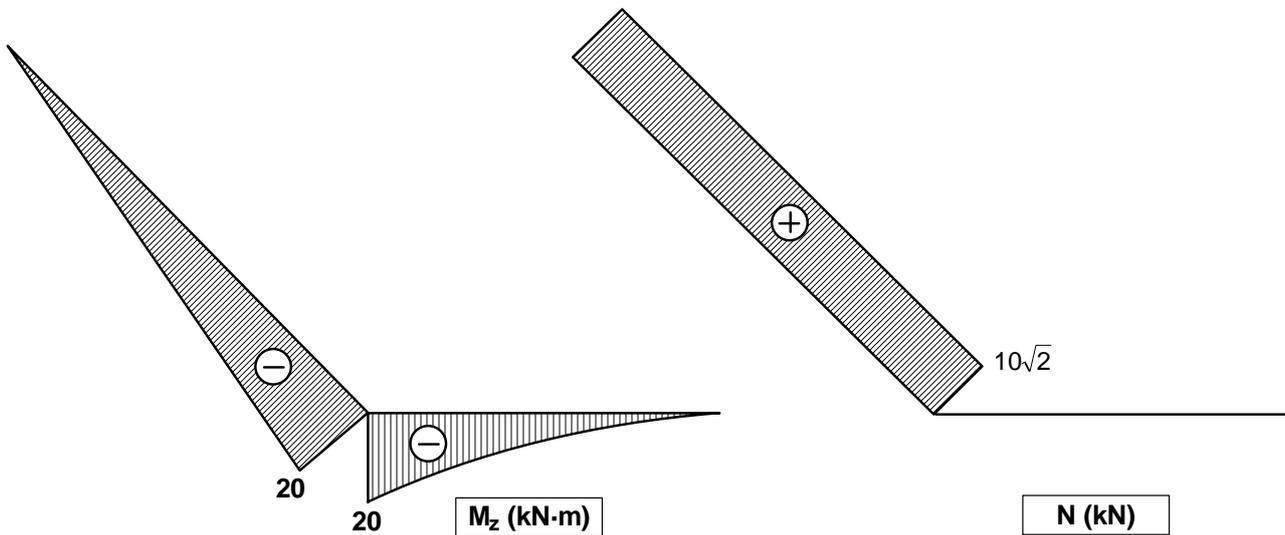
$$\sum F_V = 0 \rightarrow V_A + \frac{R_B}{\sqrt{2}} - 20(kN) = 0 \rightarrow V_A = 5kN$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow H_A - \frac{R_B}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow H_A = 15kN$$

Las referencias locales y el criterio de signos empleado para los diagramas de esfuerzos son:



Los diagramas de esfuerzo normal y momento flector son:



La barra más desfavorable es la AB, y está solicitada a flexión compuesta. La sección debe orientarse del modo más favorable para el diseño, esto es: El eje z será el de mayor inercia (x en las tablas de perfiles).

Se dimensiona en primer lugar para flexión simple, y posteriormente se comprueba para flexión compuesta.

Flexión simple:

$$W_z > \frac{|M_z|_{\max}}{\sigma_{adm}} \rightarrow W_z > \frac{20 \cdot 10^6 (N \cdot mm)}{275 \left(\frac{N}{mm^2} \right)} = 72728 \text{ mm}^3 \equiv 72,73 \text{ cm}^3$$

El perfil más ligero posible es 160.80.4, cuyas características son:

$$A = 18 \text{ cm}^2 \quad W_x = 73,6 \text{ cm}^3$$

Comprobación a flexión compuesta:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|N|_{\max}}{A} + \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} < \sigma_{adm}$$
$$|\sigma|_{\max} = \frac{14,1 \cdot 10^3 (N)}{18 \cdot 10^2 (mm^2)} + \frac{20 \cdot 10^6 (N \cdot mm)}{73,6 \cdot 10^3 (mm^3)} = 280 \text{ MPa} > 275 \text{ MPa} \text{ (no vale)}$$

El siguiente perfil es 120.100.6, con características $A = 23,7 \text{ cm}^2$ $W_x = 78,8 \text{ cm}^3$.

$$|\sigma|_{\max} = \frac{14,1 \cdot 10^3 (N)}{23,7 \cdot 10^2 (mm^2)} + \frac{20 \cdot 10^6 (N \cdot mm)}{78,8 \cdot 10^3 (mm^3)} = 260 \text{ MPa} < 275 \text{ MPa} \text{ (vale)} \text{ (3 puntos)}$$

Los pasadores de los apoyos están sometidos ambos a doble cortadura. En las chapas de los apoyos y las paredes del perfil será preciso comprobar el aplastamiento que inducen los pasadores. No existen datos suficientes para realizar otras comprobaciones adicionales.

En primer lugar, es preciso determinar qué pasador es el más solicitado.

El módulo de la reacción en el apoyo A es $R_A = \sqrt{5^2 + 15^2} = 15,9 \text{ kN}$. Como $R_B = 15\sqrt{2} = 21,3 \text{ kN}$, entonces B es el apoyo más solicitado.

Comprobación a cortadura:

$$\tau = \frac{21,3/2 \cdot 10^3 (N)}{\frac{\pi}{4} \phi^2} < 150 \text{ MPa} \rightarrow \phi > \sqrt{\frac{42600}{\pi \cdot 150}} = 9,5 \text{ mm} \rightarrow \phi = 10 \text{ mm}$$

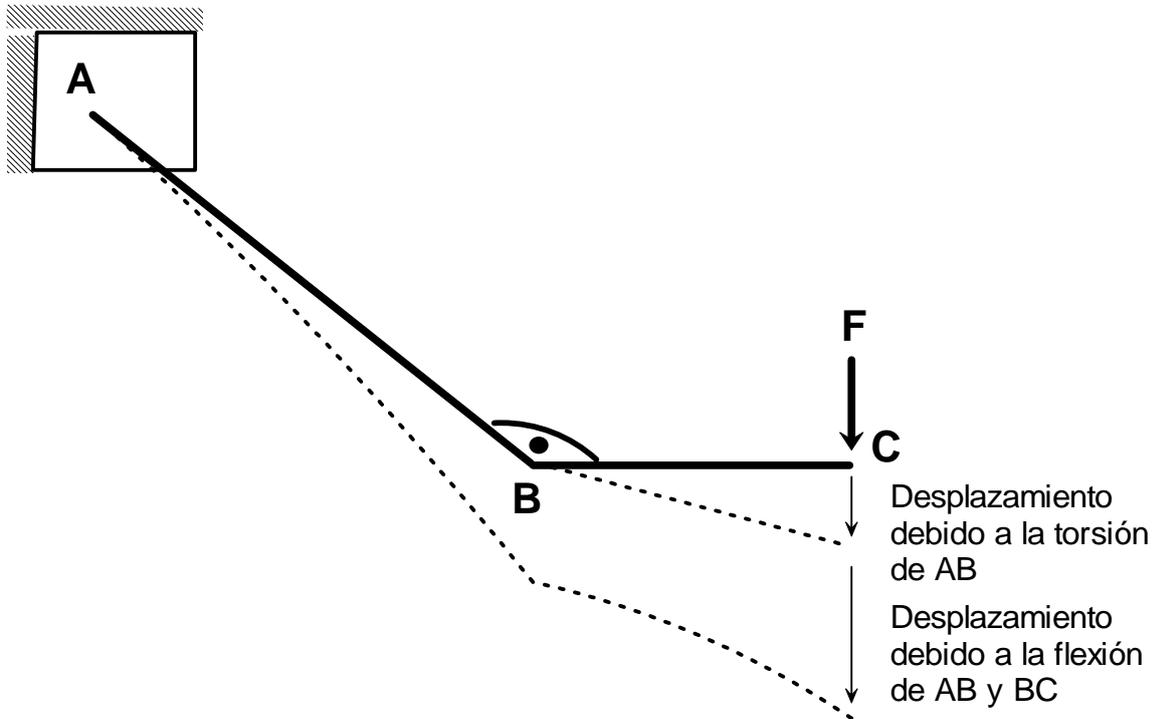
Comprobación a aplastamiento:

Tanto las chapas del apoyo como el perfil están sometidos a la misma carga de compresión y tienen el mismo espesor $e = 6 \text{ mm}$.

$$\sigma_{comp} = \frac{21,3/2 \cdot 10^3 (N)}{e \cdot \phi} \rightarrow \sigma_{comp} = \frac{21,3/2 \cdot 10^3 (N)}{6 (mm) \cdot 10 (mm)} = 178 \text{ MPa} < 275 \text{ MPa} \text{ (vale)} \text{ (2 puntos)}$$

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA 3

La barra AB está sometida a flexión y torsión, y la barra BC exclusivamente a flexión. El desplazamiento (vertical) del punto C se debe tanto a la flexión de ambas barras como a la torsión de la barra AB, que induce un desplazamiento de C igual al giro de B multiplicado por la longitud de BC.



Las características geométricas de los perfiles son:

Opción 1:	Barra AB (UPN 100)	$I_x = 206 \text{ cm}^4$	$I_t = 2,96 \text{ cm}^4$
	Barra BC (IPN 80)	$I_x = 77,8 \text{ cm}^4$	
Opción 2:	Barra AB (100.80.5)	$I_x = 221 \text{ cm}^4$	$I_t = 307 \text{ cm}^4$
	Barra BC (IPN 80)	$I_x = 77,8 \text{ cm}^4$	

Dado que las inercias a flexión de las dos opciones para la barra AB son similares (diferencia inferior al 10%), la diferencia fundamental en los desplazamientos se deberá a la torsión de la barra AB, dado que la inercia torsional en el caso 2 es 100 veces superior a la del caso 1, al tratarse de un perfil cerrado en lugar de un perfil abierto.

Asumiendo esta hipótesis, la diferencia de desplazamientos entre las opciones 1 y 2 será, en primera aproximación:

$$\delta_{vC2} - \delta_{vC1} = \left| \theta(B) \right|_2 - \theta(B) \Big|_1 \cdot L_{BC}$$

Empleando la teoría de torsión, se tiene que:

$$\theta(B) - \theta(A) = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M_T(x)}{G \cdot I_t} dx$$

Como $\theta(A) = 0$ y $M_T(x) = -2(kN) \cdot 50(cm) = -100 \text{ kN}\cdot\text{cm}$, entonces:

$$\delta_{vC2} - \delta_{vC1} = \frac{100 \cdot 10^4 (N \cdot mm)}{G} L_{AB} \cdot L_{BC} \left(\frac{1}{I_{t2}} - \frac{1}{I_{t1}} \right)$$

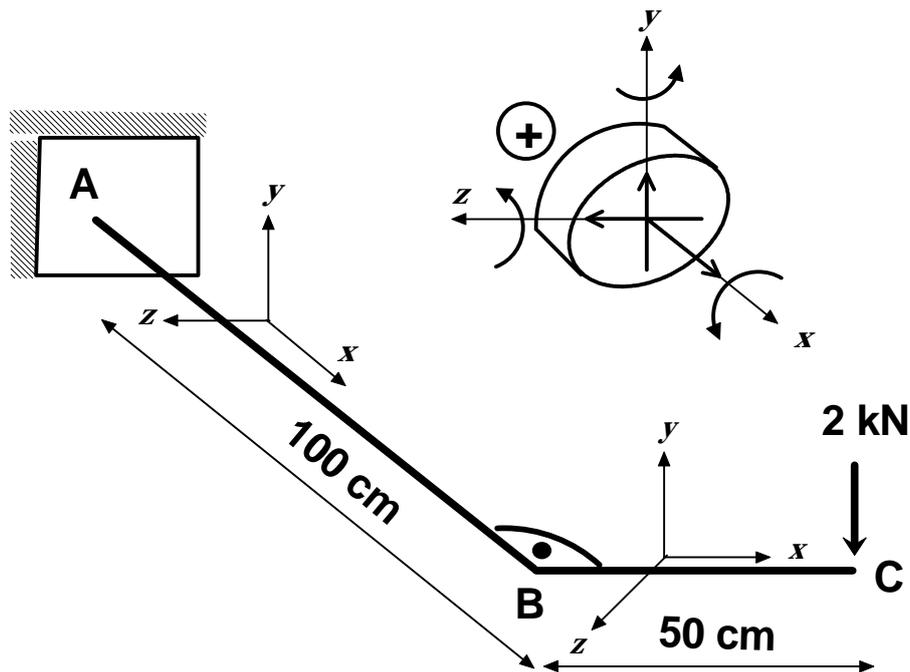
Sustituyendo valores:

$$\delta_{vC2} - \delta_{vC1} = \frac{100 \cdot 10^4 (N \cdot mm)}{0,8 \cdot 10^5 \left(\frac{N}{mm^2} \right)} 1000(mm) \cdot 500(mm) \left(\frac{1}{307} - \frac{1}{2,96} \right) \cdot \frac{1}{10^4 (mm^4)} = -212 \text{ mm}$$

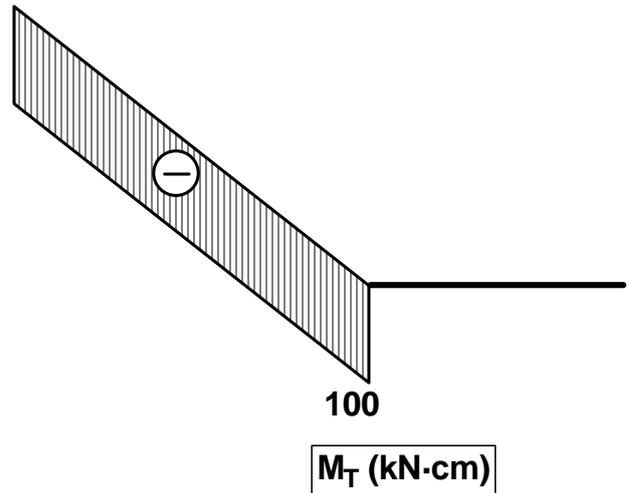
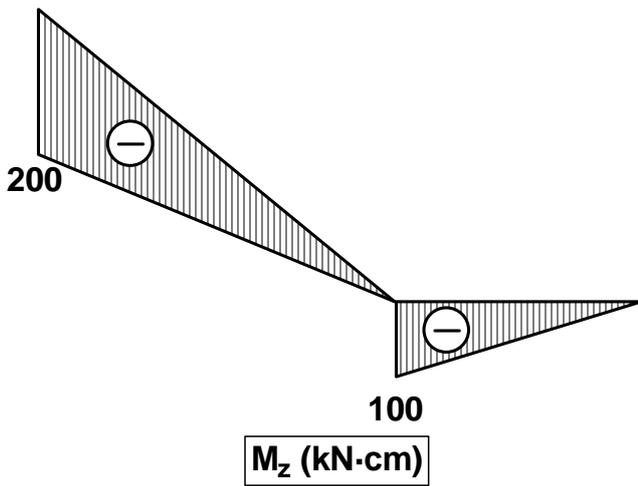
La segunda opción reduce el desplazamiento de C en 21 cm. (5 puntos)

La resolución rigurosa del ejercicio puede hacerse planteando un sistema virtual y empleando el método de la carga unidad.

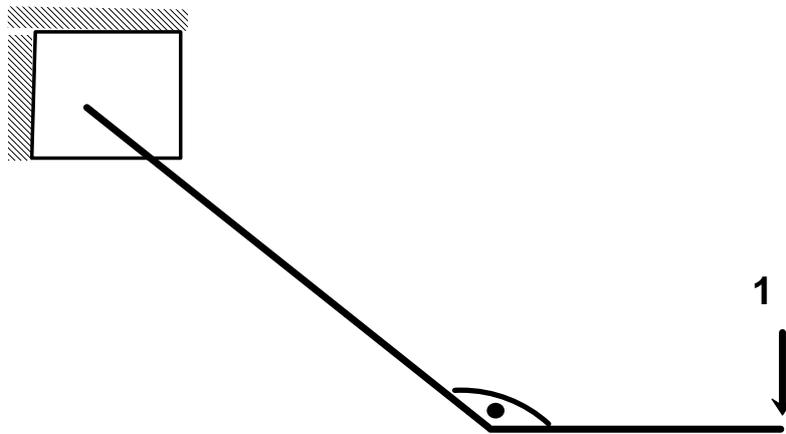
El criterio de signos y las referencias locales son:



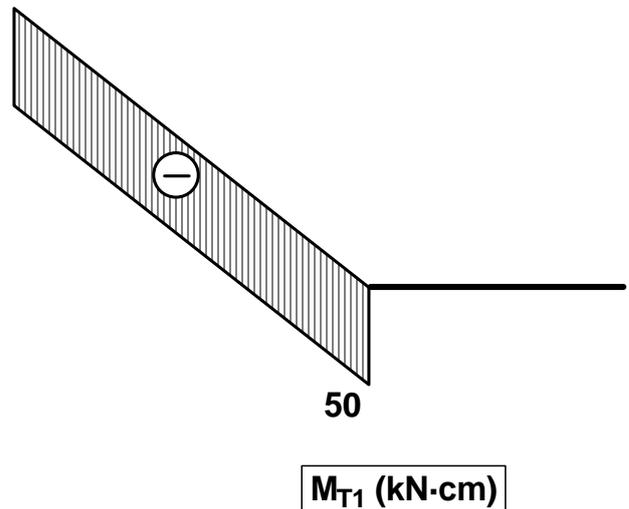
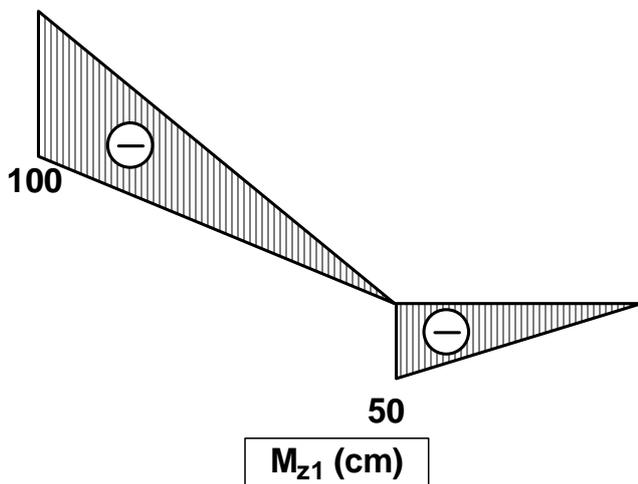
Los diagramas, para el sistema real, son:



El sistema virtual será:



Y los diagramas serán:



El desplazamiento será:

$$\delta_1 = \int_{AB} \frac{M_z(x)M_{z1}(x)}{EI_{zAB}} dx + \int_{BC} \frac{M_z(x)M_{z1}(x)}{EI_{zBC}} dx + \int_{AB} \frac{M_T(x)M_{T1}(x)}{EI_{TAB}} dx$$

Siendo el resultado positivo si el desplazamiento es en el sentido de la carga 1 (descendente). (3 puntos)

$$\delta_1 = \frac{1}{EI_{zAB}} \int_0^{100 \text{ cm}} -2(100-x)(kN \cdot m) \cdot (-1)(100-x)(m) dx + \frac{1}{EI_{zBC}} \int_0^{50 \text{ cm}} -2(50-x)(kN \cdot m) \cdot (-1)(50-x)(m) dx +$$

$$+ \frac{1}{EI_{tAB}} \int_0^{100 \text{ cm}} -100(kN \cdot m) \cdot (-50)(m) dx$$

Las integrales también se pueden resolver por el método de multiplicación de los gráficos:

$$\delta_1 = \frac{1}{EI_{zAB}} \frac{1}{2} (-200) 100 \cdot \frac{2}{3} (-100) (kN \cdot cm^3) + \frac{1}{EI_{zBC}} \frac{1}{2} (-100) 50 \cdot \frac{2}{3} (-50) (kN \cdot cm^3) +$$

$$+ \frac{1}{EI_{tAB}} (-200) 100 \cdot (-200) (kN \cdot cm^3)$$

Operando:

$$\delta_1 = \frac{1}{I_{zAB}} \frac{1}{2 \cdot 10^5 \left(\frac{N}{mm^2} \right)} \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 10^{12} (N \cdot mm^3) + \frac{1}{I_{zAB}} \frac{1}{2 \cdot 10^5 \left(\frac{N}{mm^2} \right)} \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 10^{10} (N \cdot mm^3) +$$

$$+ \frac{1}{I_{tAB}} \frac{1}{0,8 \cdot 10^5 \left(\frac{N}{mm^2} \right)} 5 \cdot 10^{11} (N \cdot mm^3)$$

Sustituyendo valores:

Opción 1: $\delta_1 = 1,54 + 0,51 + 211,4 = 213,2 \text{ mm}$

Opción 2: $\delta_1 = 1,43 + 0,51 + 2,03 = 3,97 \text{ mm}$

Diferencia: La opción 2 se desplaza 209,2 mm menos que la 1. (2 puntos)