

NOMBRE

SOLUCION

1.- De las siguientes afirmaciones, marque la que considere FALSA:

Si las tensiones son funciones polinómicas de grado 2 respecto de las coordenadas, las fuerzas de volumen son polinómicas de grado 1

La matriz de tensiones en un punto es simétrica porque en el entorno del mismo debe haber equilibrio de momentos

En cualquier punto de un sólido en equilibrio, siempre existen tres direcciones ortogonales para las que el vector tensión correspondiente tiene componente normal nula

Para que el sólido esté en equilibrio, las fuerzas de superficie y de volumen deben estar en equilibrio

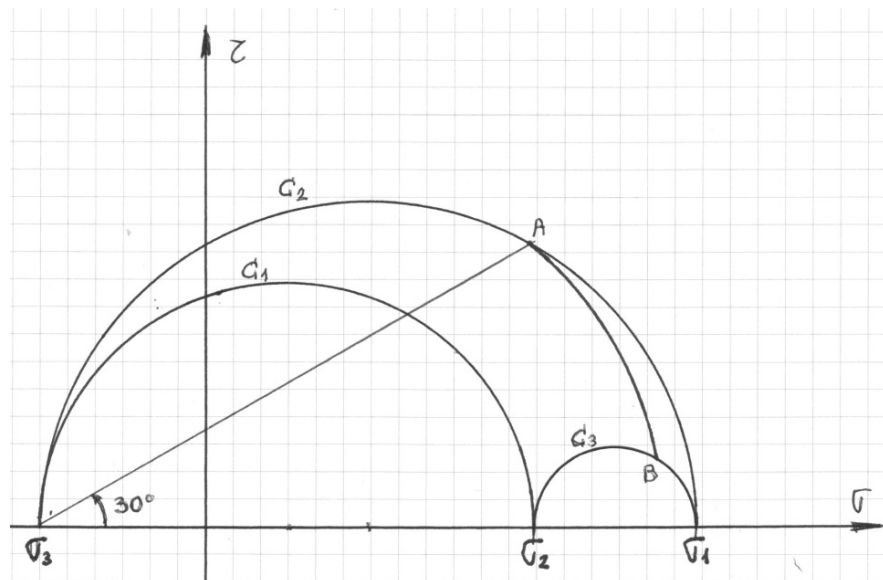
2.- En el diagrama de Mohr de la figura, el arco AB es concéntrico con C_1 . El arco AB es el lugar geométrico de los extremos de los vectores tensión...

... que forman 30° con la normal

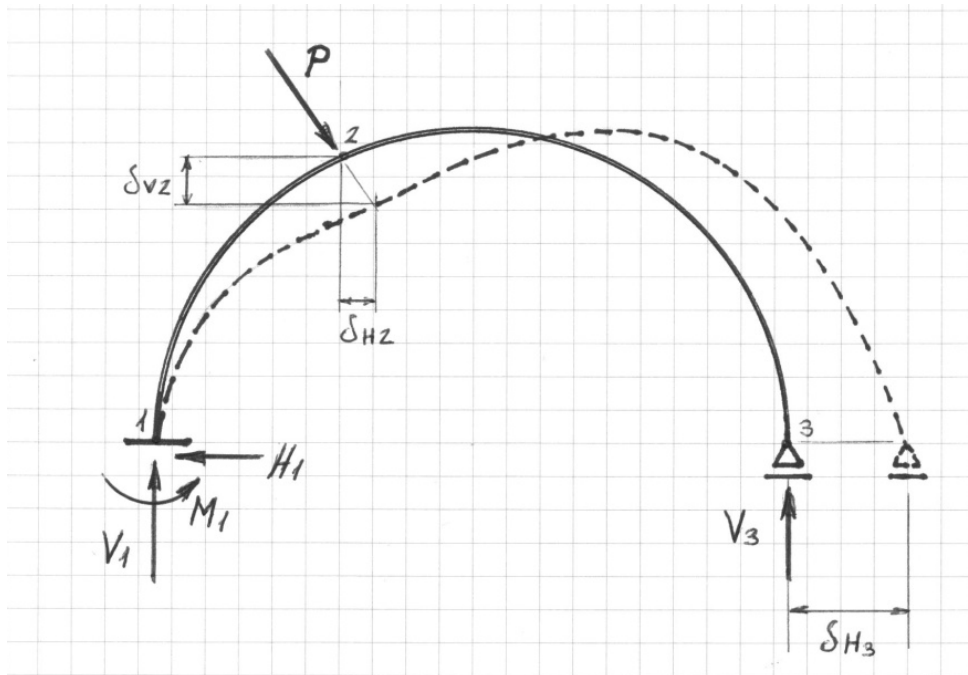
... cuya componente normal forma 30° con la 1ª dirección principal

... cuya componente normal forma 30° con la 3ª dirección principal

... cuyo módulo es igual al radio del arco



3.- En la figura se presenta a trazos la posición final de un arco sometido a la fuerza exterior P , aplicada en 2. Se indican las reacciones en los apoyos, así como las componentes verticales y horizontales de los desplazamientos de los puntos 2 y 3. Indique cuál es la afirmación FALSA:



- El trabajo aportado en 1 es nulo
- El trabajo aportado en 2 es $\frac{1}{2} P \sqrt{\delta_{H2}^2 + \delta_{V2}^2}$
- El trabajo aportado en 3 es $\frac{1}{2} V_3 \delta_{H3}$
- El trabajo aportado en cualquier punto distinto del 2 es nulo

4.- Indique cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA:

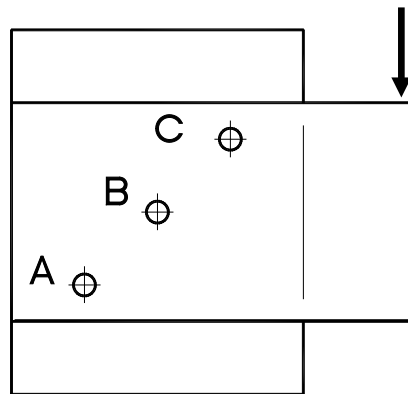
- Las deformaciones tienen unidades de longitud
- El módulo de Young tiene unidades de tensión
- El coeficiente de Poisson es adimensional
- El módulo de elasticidad transversal G siempre es positivo

5.-Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA:

- En un perfil delgado cerrado sometido a torsión pura, a mayor área encerrada por la línea media, menor tensión tangencial máxima
- En un perfil delgado cerrado de espesor variable sometido a torsión pura, la tensión tangencial máxima se dará en la zona de espesor máximo
- En dos barras de sección de pared delgada iguales, pero una abierta y la otra cerrada, frente al mismo momento torsor la energía elástica acumulada es mayor en perfil abierto
- En un perfil delgado abierto ramificado sometido a torsión pura, la tensión tangencial máxima se dará en la rama de espesor máximo

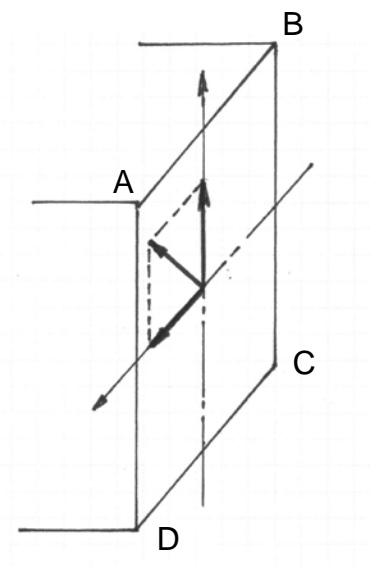
6.- Indique cuál de los tornillos de la unión representada en la figura se encuentra más solicitado a cortadura:

- Tornillo A
- Tornillo B
- Tornillo C
- Tornillos A y C por igual



7.- Una sección rectangular está sometida a flexión oblicua tal como se indica en la figura. El vértice de la sección que está sometido a una tensión máxima de tracción es el:

- A
- B
- C
- D

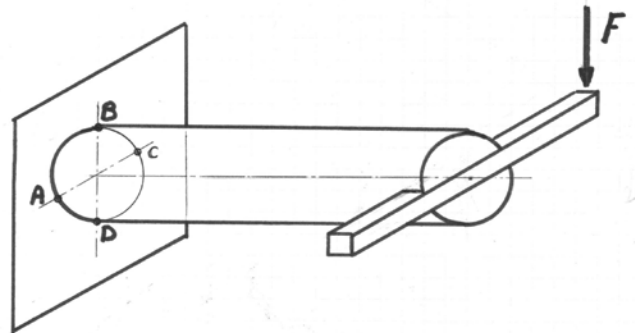


8.- Indique cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA

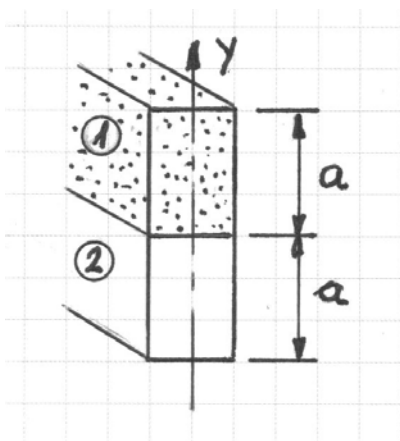
- Si el centro de presiones de una sollicitación de flexión compuesta pertenece al núcleo central, el eje neutro correspondiente corta a la sección
- El baricentro de una sección siempre pertenece al núcleo central
- El núcleo central de una IPN tiene forma de rombo
- El núcleo central de una sección en forma de anillo es un círculo

9.- Para la estructura de la figura sometida a la carga F , indique cuál de las siguientes afirmaciones relativas a los puntos A, B, C, D de la sección empotrada de la barra es FALSA:

- En el punto B se da la tensión normal máxima de tracción
- En el punto C la tensión normal es nula
- En los puntos B y D, el módulo de la tensión tangencial es el mismo
- El módulo de la tensión tangencial en A es mayor que el de la de C



10.- La viga compuesta de la figura soporta un momento M que vectorialmente es perpendicular al eje y . Sabiendo que el material 1 es más rígido que el 2 ($E_1 > E_2$), indique cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA:



- La posición del eje neutro es independiente de M
- El módulo de la tensión en el borde superior es igual que en el inferior
- La tensión en la interfase de los dos materiales es discontinua
- La sección equivalente de material 1 tiene forma de T

PROBLEMA 1 (10 puntos). Tiempo: 1 hora

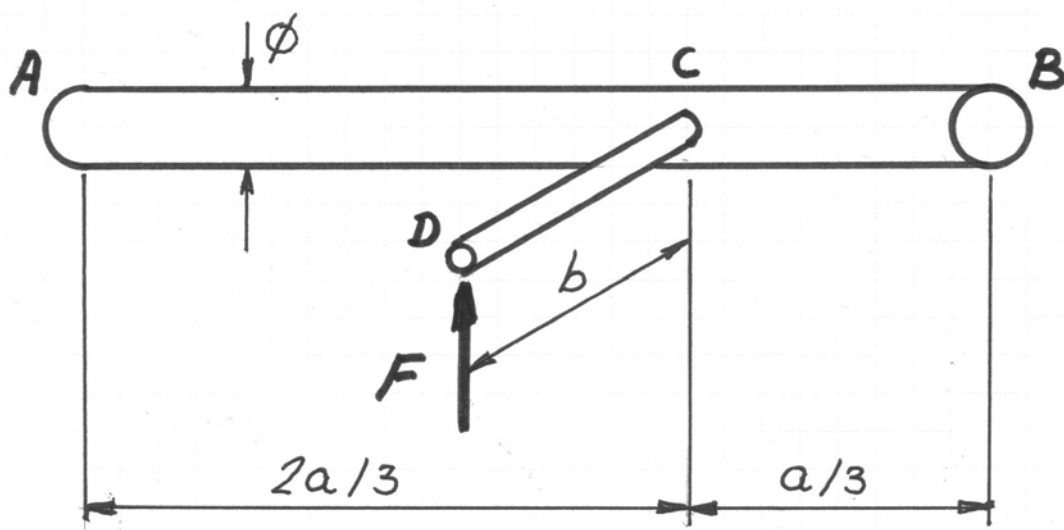
En la figura se tiene el esquema de una barra de un sistema de amortiguamiento ferroviario. En el extremo **A** están impedidos todos los desplazamientos y el giro según el eje de la barra. En el extremo **B** sólo están impedidos los desplazamientos. Para la barra **AB**, teniendo en cuenta los datos numéricos indicados al final del enunciado y despreciando el efecto del esfuerzo cortante para los apartados 2 a 5, se pide:

- 1º) Diagramas acotados de esfuerzos
- 2º) Círculos de Mohr acotados en los puntos de máximo estado tensional
- 3º) Coeficiente de seguridad en los puntos de máximo estado tensional según los criterios de Tresca y Mises
- 4º) Energía elástica acumulada expresada en Julios
- 5º) Desplazamiento vertical del punto **D** suponiendo el brazo de palanca **CD** indeformable

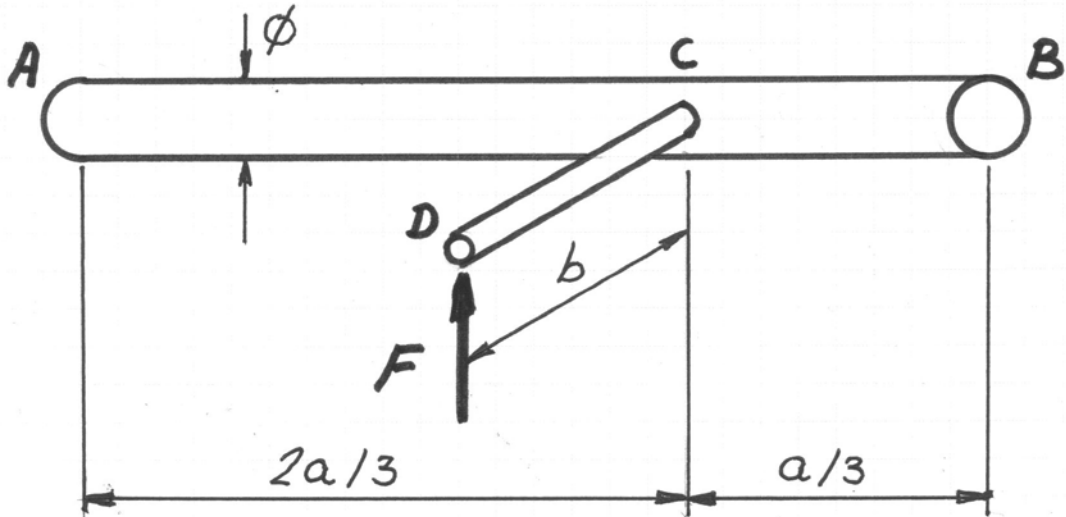
DATOS:

$$a = 1,5m ; b = 0,5m ; \varnothing = 120mm ; F = 100kN$$

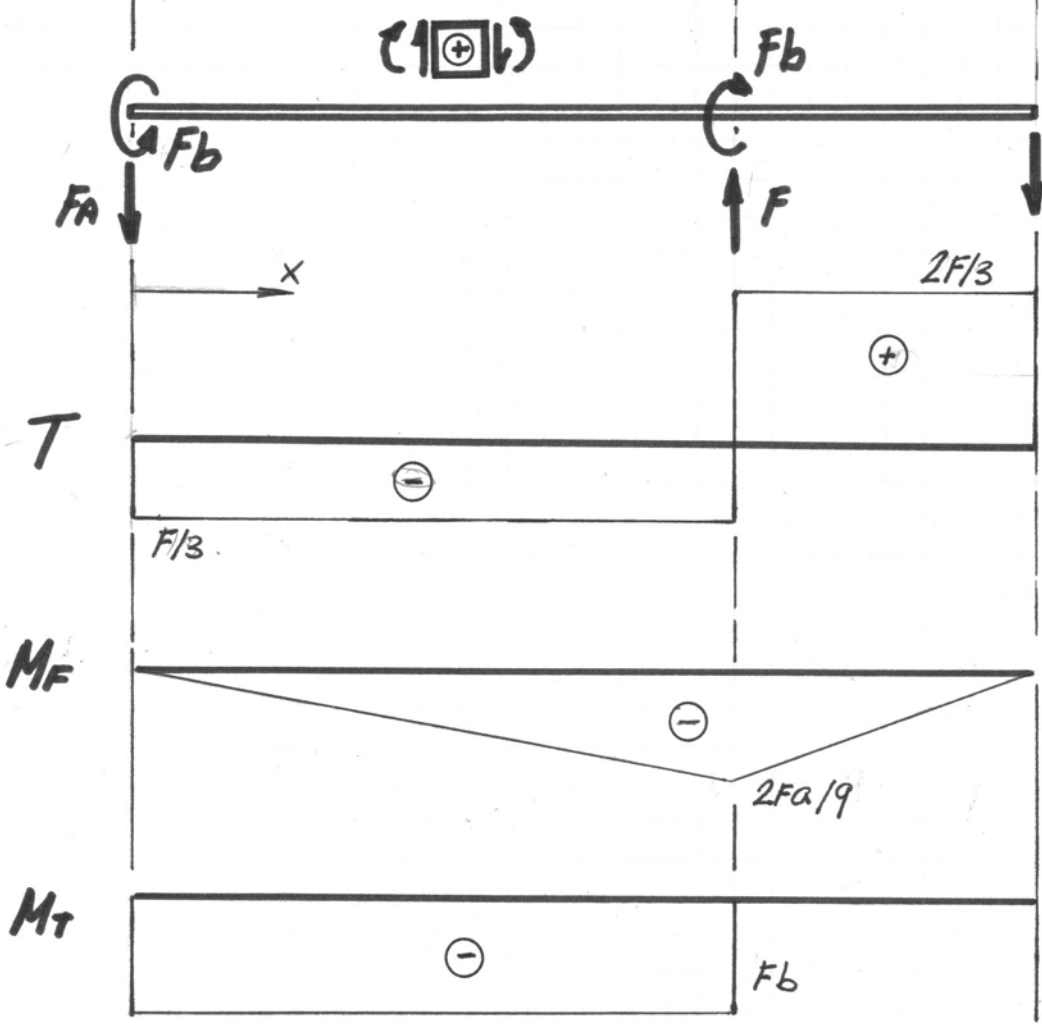
$$E = 210.000MPa ; G = 80.000MPa ; \sigma_e = 300MPa$$



PROBLEMA 1. SOLUCIÓN



10)



Acciones sobre la barra AB y equilibrio:

$$F_A + F_B = F$$

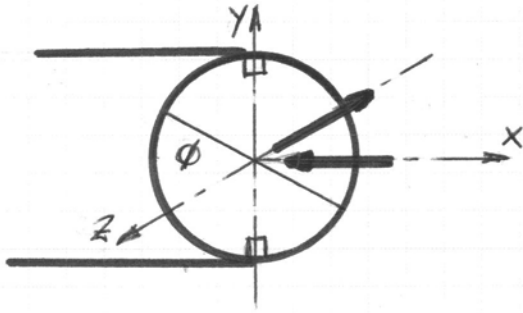
$$F_B \cdot a = F \cdot \frac{2a}{3}$$

de donde:

$$V_A = F/3$$

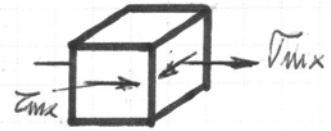
$$V_B = 2F/3$$

2ª) La sección más solicitada es la C:

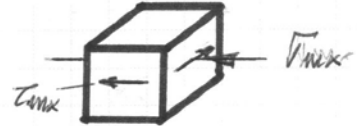


Puntos de máximo estado tensional

$$y = \frac{\phi}{2}, z = 0$$



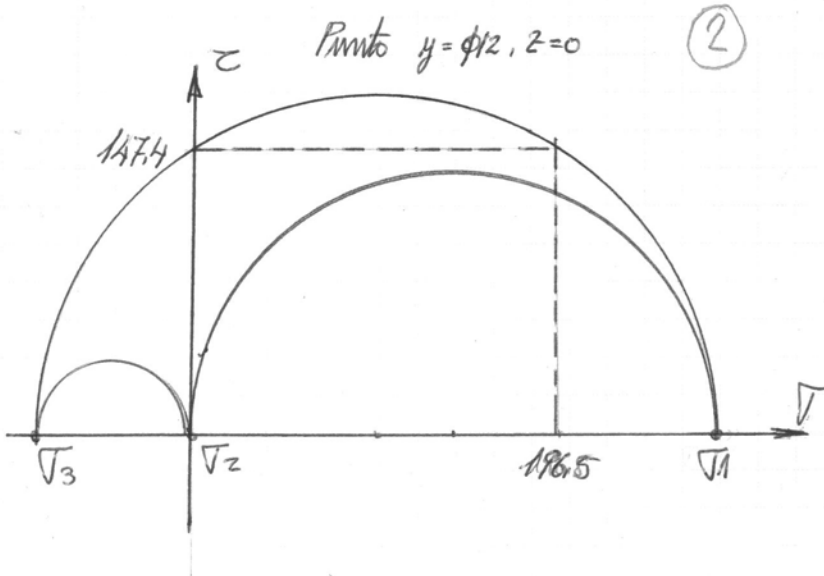
$$y = -\frac{\phi}{2}, z = 0$$



$$\sigma_{\max} = \frac{M_F}{I_z} \frac{\phi}{2} = \frac{2Fa/9}{\pi(\phi/2)^4/4} \frac{\phi}{2} = \frac{64 Fa}{9 \pi \phi^3} = \frac{64 \cdot 100 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m}}{9 \pi \cdot 120^3 \text{ mm}^3} = 196,5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{I_x} \frac{\phi}{2} = \frac{F \cdot b}{\pi(\phi/2)^4/2} \frac{\phi}{2} = \frac{16 Fb}{\pi \phi^3} = \frac{16 \cdot 100 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m}}{\pi \cdot 120^3 \text{ mm}^3} = 147,4 \text{ MPa}$$

3ª) Tensiones principales en $y = \phi/2, z = 0$:

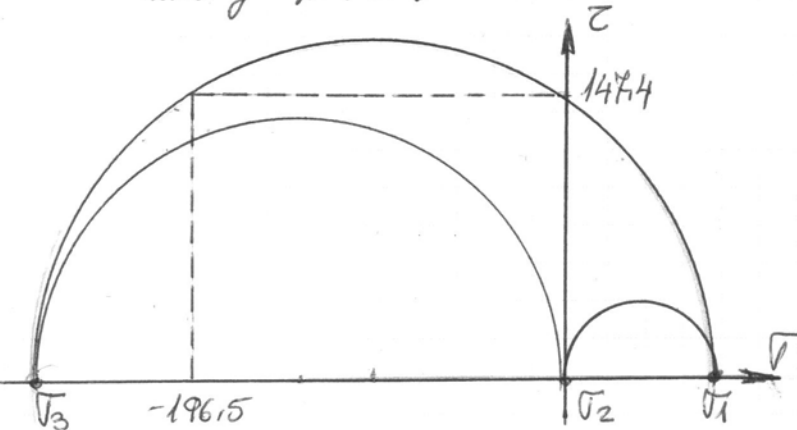


$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_{\max}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\max}}{2}\right)^2 + \tau_{\max}^2} = \\ &= \frac{196,5}{2} + \sqrt{\left(\frac{196,5}{2}\right)^2 + 147,4^2} = \\ &= 275,4 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{\sigma_{\max}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\max}}{2}\right)^2 + \tau_{\max}^2} = \\ &= -78,9 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Punto $y = -\phi/2, z = 0$



Coefficientes de seguridad:

Tresca: $M = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma_3} =$ (2)

$$= \frac{300}{275,4 - (-78,9)} = 0,85$$

Mises:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{2} \sigma_e / \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot 300}{\sqrt{275,4^2 + 78,9^2 + (-78,9 - 275,4)^2}} = \\ &= 0,93 \end{aligned}$$

Idem para el punto $y = -\phi/2, z = 0$

Según el resultado, ambos puntos se encuentran en régimen plástico

4.) Energía elástica (suponiendo que toda la barra está en régimen elástico):

$$W = \int \left(\frac{M_F^2}{2EI_z} + \frac{M_T^2}{2GI_x} \right) dx = \int_0^{2a/3} \frac{F^2 x^2}{18EI_z} dx + \int_{2a/3}^a \frac{4F^2 (a-x)^2}{18EI_z} dx + \frac{F^2 b^2}{2GI_x} \frac{2a}{3} =$$

$$0 < x < 2a/3 \quad M_F(x) = -\frac{F}{3}x$$

$$M_T = -Fb$$

$$2a/3 < x < a \quad M_F(x) = -\frac{2F}{3}(a-x)$$

$$M_T = 0$$

$$= \frac{2F^2 a^3}{3^5 EI_z} + \frac{2F^2 b^2 a}{9GI_x} =$$

$$= (130 + 511.7) J = 641.7 J$$

(2)

$$I_z = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\phi}{2} \right)^4 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{120}{2} \right)^4 = 10178784 \text{ mm}^4$$

$$I_x = 2I_z = 20357568 \text{ mm}^4$$

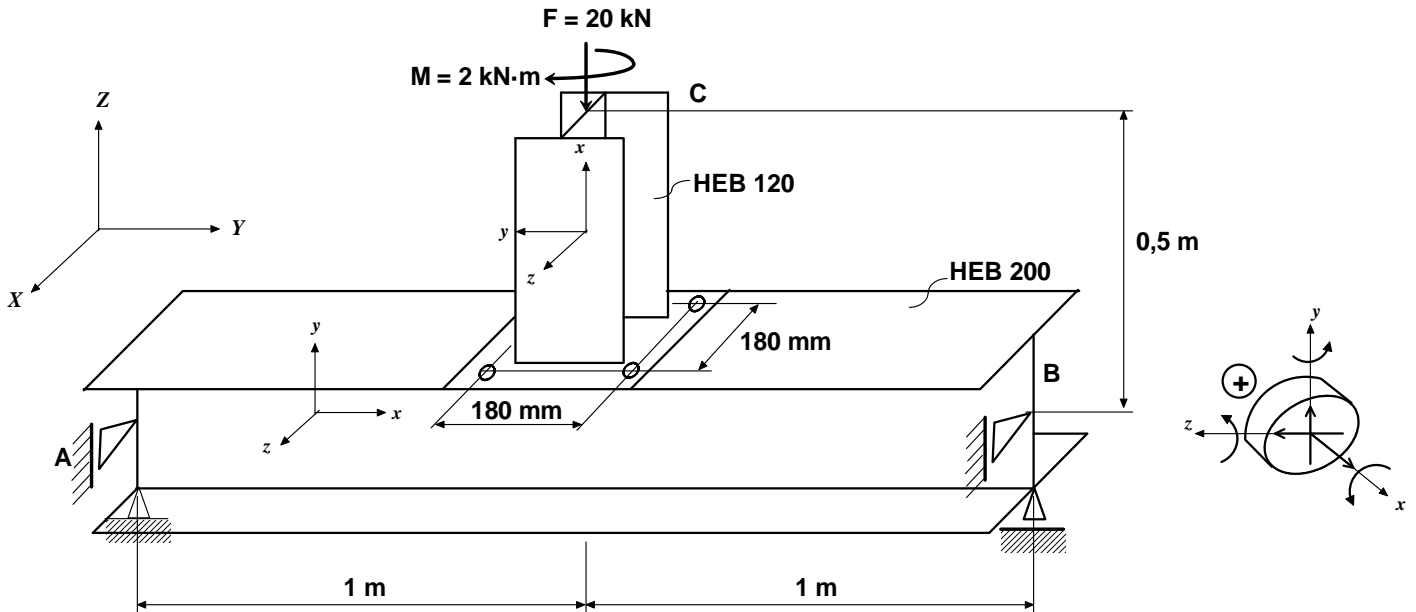
5.) Por el Teorema de Castigliano:

$$\delta_D = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{4Fa^3}{3^5 EI_z} + \frac{4Fb^2 a}{9GI_x} = (2.6 + 10.2) \text{ mm} = 12.8 \text{ mm}$$

(1)

PROBLEMA 2 (1 hora - 10 puntos)

En la estructura de la figura, en A están impedidos los desplazamientos según los ejes **globales** X , Y , Z y en B los desplazamientos según X , Z y el giro según Y .



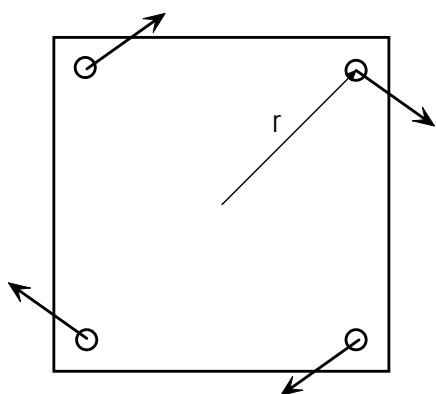
Se pide (sin considerar el peso propio de los perfiles):

- 1.- (2 puntos) Compruebe que si se colocan 4 tornillos (diámetro útil: $\phi = 16$ mm, $\tau_{adm} = 150$ MPa), en la placa de unión (espesor $e = 10$ mm), no se produce ni la cortadura de éstos ni el aplastamiento de las paredes de los taladros ($\sigma_{adm} = 275$ MPa).
- 2.- (1,5 puntos) Reacciones R_{AX} , R_{BX} , R_{AZ} , R_{BZ} en los apoyos, respecto a los ejes **globales** X , Y , Z .
- 3.- (2 puntos) Para el criterio de signos y para las referencias **locales** x , y , z de la figura, obtenga los diagramas acotados de momentos flectores M_y y M_z y de torsores M_T en la estructura.
- 4.- (1,5 puntos) Tensión normal máxima en AB, comprobando que es inferior a la admisible del perfil ($\sigma_{adm} = 275$ MPa).
- 5.- (3 puntos) Giro del extremo C, en grados, alrededor del eje global Z ($E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, $G = 0,8 \cdot 10^5$ MPa).

RESOLUCIÓN

1.- Por tener el mismo diámetro y encontrarse a la misma distancia del centro de gravedad de la unión, sobre cada tornillo actúa una fuerza $F_i = \frac{M}{4r}$, siendo

$$r = \sqrt{2} \cdot 90 = 127 \text{ mm}, \text{ es decir } F_i = \frac{2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{4 \cdot 127 \text{ mm}} = 3937 \text{ N}. \quad (1 \text{ punto})$$



En la figura se representan las acciones sobre cada tornillo que resultan al eliminar la barra vertical.

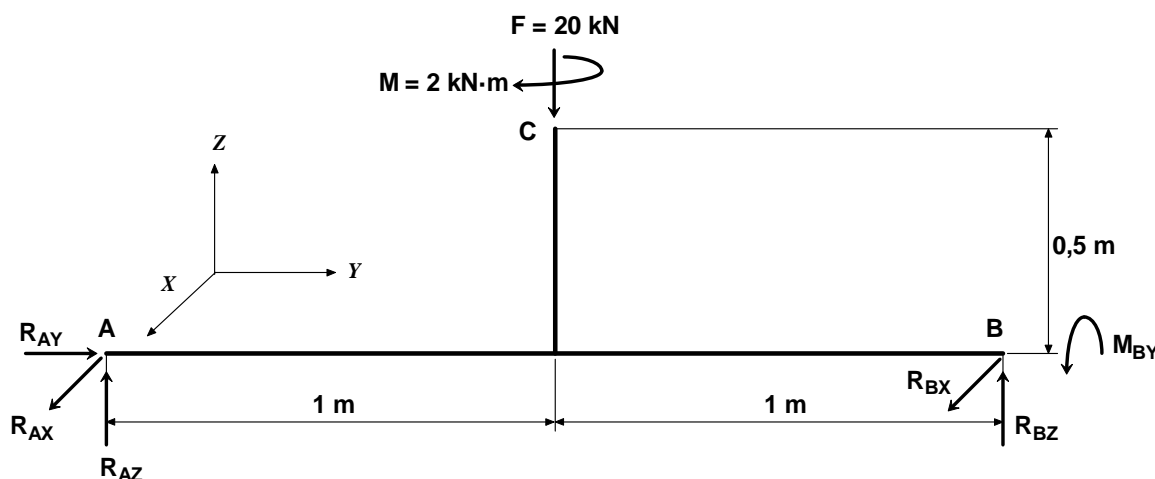
Como solo hay una sección sometida a cortadura, esta fuerza coincide con el esfuerzo cortante, por lo que

$$\tau_i = \frac{3937 \text{ N}}{\frac{\pi}{4} \cdot 16^2 \text{ mm}^2} = 20 \text{ MPa} \quad (0,5 \text{ puntos})$$

Para la determinación de la tensión de aplastamiento, se emplea el espesor de la placa de unión (10 mm), por ser inferior al del ala del HEB 200 (15 mm), de modo que

$$\sigma_i = \frac{3937 \text{ N}}{10 \cdot 16 \text{ mm}^2} = 24 \text{ MPa}. \quad (0,5 \text{ puntos})$$

2.- El conjunto de acciones y reacciones sobre el esquema de barras de la estructura es el de la figura siguiente.



Planteando equilibrio de momentos en A según X se tiene:

$$\sum M_{(AX)} = 0 \rightarrow -20 \cdot 1 + R_{BZ} \cdot 2 = 0 \rightarrow R_{BZ} = 10 \text{ kN}$$

Al plantear equilibrio de fuerzas según Z, se obtiene que $R_{AZ} = 10 \text{ kN}$ (0,5 puntos)

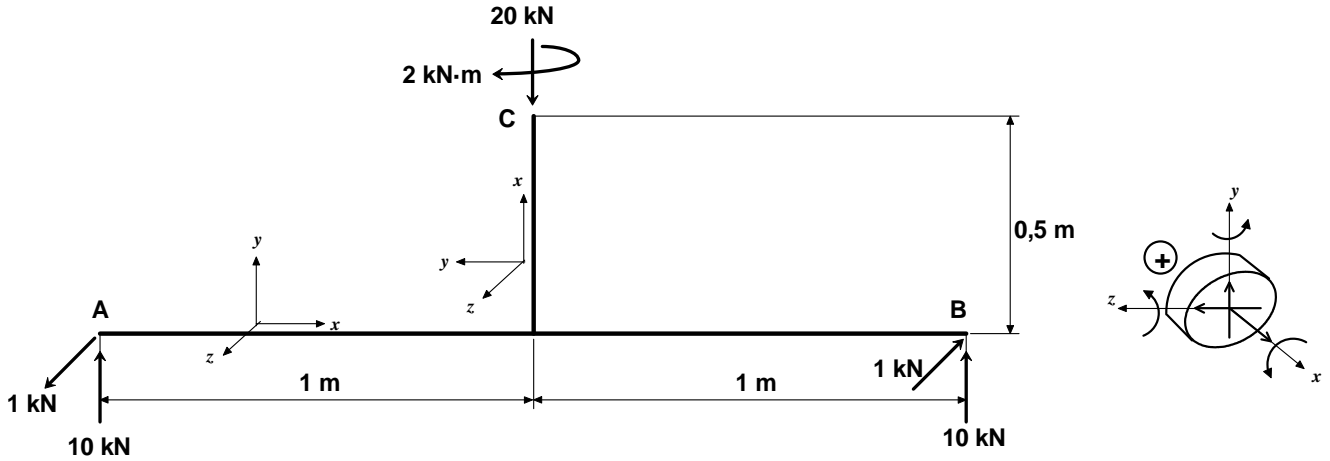
A esta conclusión también se llega por inspección directa de la estructura, comprobando que en el plano YZ es simétrica de cargas y apoyos.

Planteando equilibrio de momentos en A según Z se tiene:

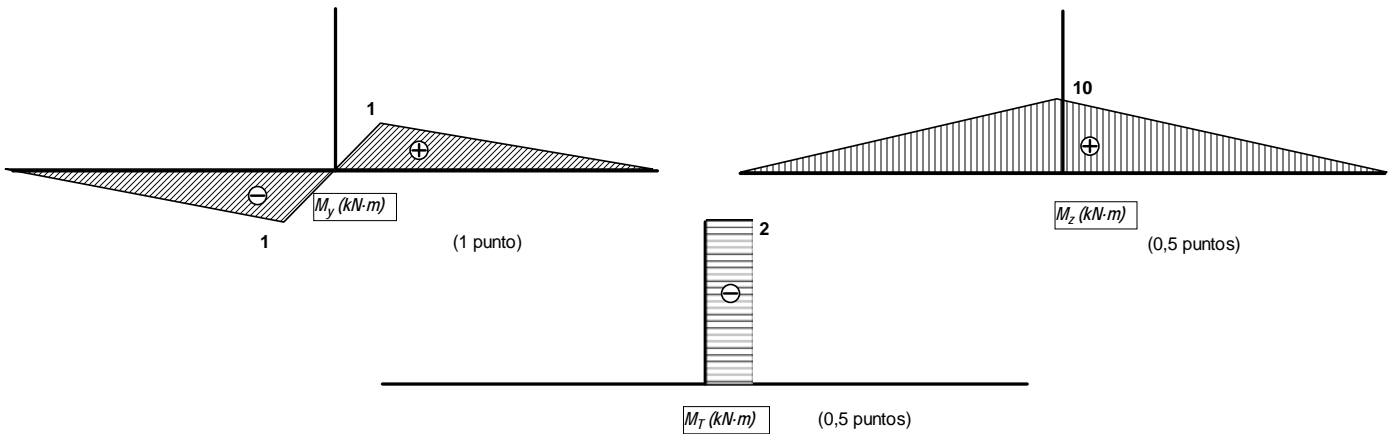
$$\sum M_{(AZ)} = 0 \rightarrow -2 - R_{BX} \cdot 2 = 0 \rightarrow R_{BX} = -1 \text{ kN}$$

Al plantear equilibrio de fuerzas según X , se obtiene que $R_{AX} = 1 \text{ kN}$ (1 punto)

3.- Las acciones sobre la estructura son las de la figura.



Los diagramas pedidos son los siguientes:



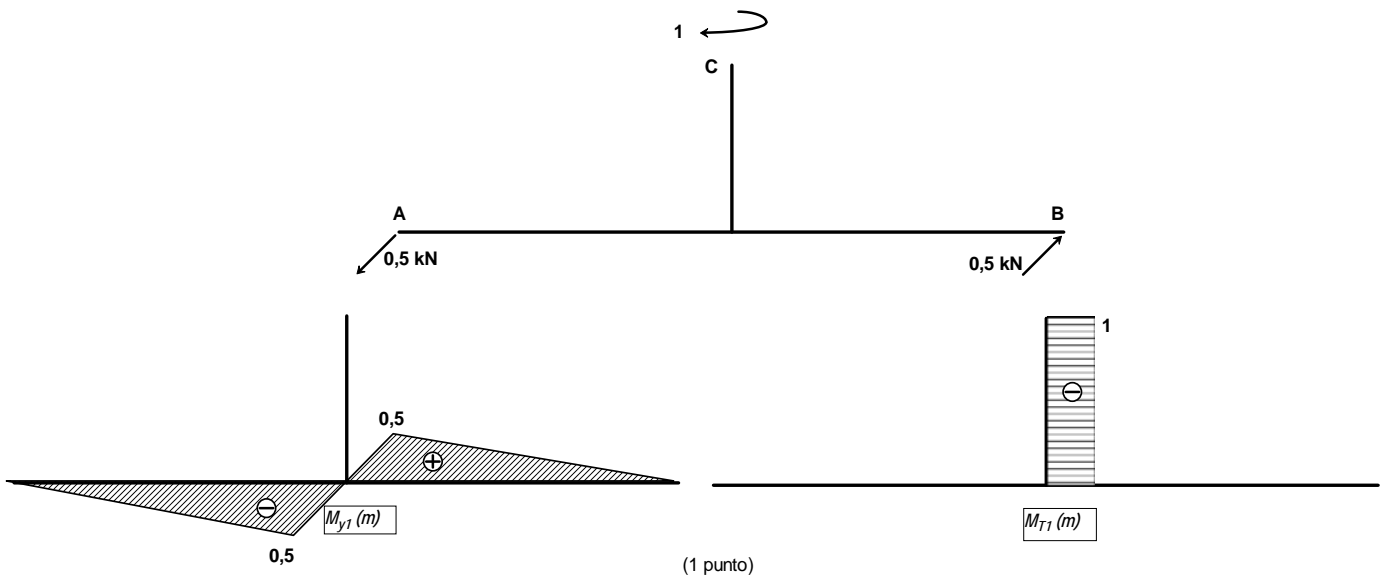
4.- A la vista de los diagramas, AB está sometida a flexión oblicua. En flexión oblicua, una

acotación por exceso de la tensión normal máxima es $\sigma_{\text{máx}} = \frac{|M_y|_{\text{máx}}}{W_y} + \frac{|M_z|_{\text{máx}}}{W_z}$. En el caso

tratado, esta acotación coincide con el valor real, porque los máximos de M_y y M_z se dan en la misma sección.

$$\text{Sustituyendo valores: } \sigma_{\text{máx}} = \frac{10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}}{2 \cdot 10^5 \text{ mm}^3} + \frac{10^7 \text{ N}\cdot\text{mm}}{5,7 \cdot 10^5 \text{ mm}^3} = 23 \text{ MPa} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

5.- Para hallar el giro, se emplea el método de la carga unidad. El sistema virtual (con las reacciones ya calculadas), y sus diagramas no nulos asociados es el de la figura.



A la vista de los diagramas, el giro se obtiene de la siguiente expresión:

$$\theta_1 = \int_{BC} \frac{M_T M_{T1}}{G I_t} dx + \int_{AB} \frac{M_y M_{y1}}{E I_y} dx$$

Viniendo el giro medido según el par unitario, es decir, en sentido contrario al eje Z.

Hay que resaltar que la primera integral contiene el giro de torsión de la barra BC y la segunda el de flexión de la barra AB con respecto al eje local y.

Sustituyendo las leyes:

$$\theta_1 = \frac{1}{G I_t} \int_0^{0,5\text{ m}} (-2)(-1) dx + \frac{1}{E I_y} \left(\int_0^{1\text{ m}} (-0,5x)(-x) dx + \int_{1\text{ m}}^{2\text{ m}} 0,5(2-x)(2-x) dx \right)$$

Viniendo las integrales en kN·m², y teniendo las dos integrales de la barra AB el mismo valor (al tener en cuenta que ambas mitades de la barra contribuyen por igual al giro). (1 punto)

Sustituyendo valores:

$$\theta_1 = \frac{1}{0,8 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1,49 \cdot 10^5 \text{ mm}^4} \cdot 1 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^2 + \frac{1}{2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 2 \cdot 10^7 \text{ mm}^4} \cdot 2 \cdot \frac{0,5}{3} \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^2$$

Operando: $\theta_1 = 8,4 \cdot 10^{-2} \text{ rad} + 8,4 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$, en sentido contrario al eje Z.

(1 punto)

Como puede observarse, el giro debido a la flexión de AB es despreciable, aunque a priori no se podía asegurar.