INDUSTRIALES
ETSII | UPM

CURSO 2012-13
4-07-2013

RESISTENCIA DE MATERIALES I
EXAMEN EXTRAORDINARIO

CUESTIONES (10 puntos)

Fecha de publicación de la preacta: julio de 2013
Fecha de revisión del examen: julio de 2013

CUESTIÓN 1 (1,5 puntos)

Sobre un sólido elástico actúan las fuerzas de volumen $f_V = (1, y-2, 0)$ en MN/m³ con la coordenada y en m. Se sabe que el tensor de tensiones depende sólo de y. Si en el plano y=0 dicho tensor es $T_{y=0} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ MPa, calcular la expresión general del vector tensión sobre los puntos de cualquier plano paralelo a este indicando sus unidades.

Solución

La expresión del vector tensión sobre un plano paralelo a y=0 vendrá dada por:

$\overline{\sigma} = [T]\cdot\overline{n} \Rightarrow \overline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$. Aplicamos las ecuaciones de equilibrio interno

$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + 1 = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = -y + A$. Para x=0 $\tau_{xy} = 2 = A \Rightarrow \sigma_x = -y + 2$ MPa 0,5 puntos

$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + y - 2 = 0 \Rightarrow \sigma_y = 2y - \frac{y^2}{2} + B$. Para x=0 $\sigma_y = 0 = B \Rightarrow \sigma_y = 2y - \frac{y^2}{2}$ MPa 0,5 puntos

$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \tau_{yz} = C$. Para x=0 $\tau_{yz} = 1 = C \Rightarrow \tau_{xy} = 1$ MPa 0,5 puntos

---

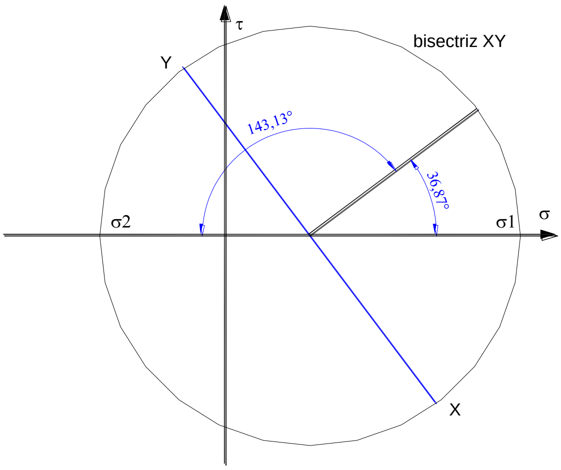
CUESTIÓN 2 (1,5 puntos)

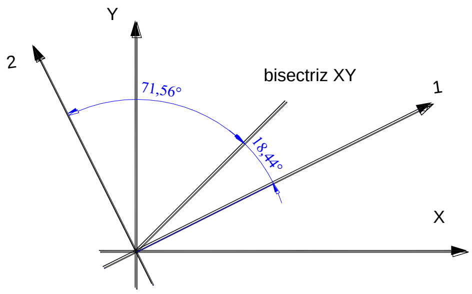
Dado un estado tensional plano cuyo tensor de tensiones es $T = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} MPa$, determinar gráficamente el ángulo que forma con las direcciones principales la bisectriz del primer cuadrante (XY positivo) y dibujar las direcciones principales en el plano XY.

Solución

Las tensiones principales son: $\left.\begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \sigma_1 = 2 + 5 = 7MPa \\ \sigma_3 = 2 - 5 = -3MPa \end{matrix}\right.$

0,5 puntos





0,5 puntos 0,5 puntos

CUESTIÓN 3 (1 puntos)

Determinar de acuerdo con el criterio simplificado de Mohr cuál de los dos estados tensionales siguientes se encuentra más próximo a la rotura y dibujar los círculos correspondientes a sus estados límites:

1) $\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = -12$; $\sigma_3 = -20$ MPa
2) $\sigma_1 = 2$; $\sigma_2 = -7$; $\sigma_3 = -10$ MPa

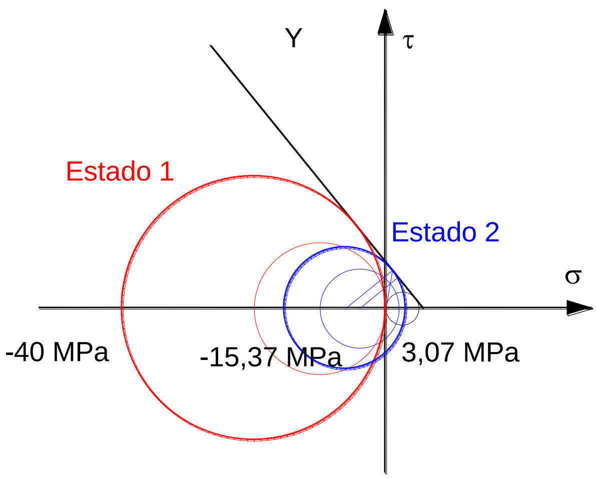
($\sigma_{rt} = 5$ MPa y $\sigma_{rc} = -40$ MPa)

Solución

Según el criterio simplificado de Mohr, el coeficiente de seguridad es:

1.- $n = \dfrac{5}{0 - \dfrac{5}{40}(-20)} = 2$ 2.- $n = \dfrac{5}{2 - \dfrac{5}{40}(-10)} = 1{,}54$ 0,5 puntos

Se encuentra más próximo a la rotura el estado tensional 2.



0,5 puntos

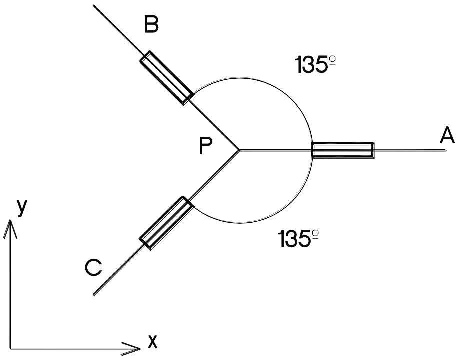
CUESTIÓN 4 (3 puntos)

Un sólido elástico tiene su cara superior paralela al plano XY en un sistema de referencia ortogonal XYZ. En un punto P de dicha cara se coloca la roseta extensométrica de la figura, que tras la puesta en carga permite medir los siguientes valores:

$\varepsilon_A = -11{,}25\cdot 10^{-5}$ $\varepsilon_B = 2{,}5\cdot 10^{-5}$ $\varepsilon_C = 5\cdot 10^{-5}$

Se pide determinar el tensor de deformación en el punto P sabiendo que no actúan cargas sobre la cara superior del sólido.

Datos: $E = 2\cdot 10^5$ MPa; $\nu=0{,}25$



SOLUCIÓN

Como no hay fuerzas de superficie en la cara superior del sólido:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ * & \sigma_y & \tau_{yz} \\ * & * & \sigma_z \end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$

<u>Leyes de Hooke generalizadas</u>

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right] \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\sigma_x\right] \qquad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[-\nu\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{xz} = 0 \qquad \gamma_{yz} = 0$$

De las cuatro ecuaciones de deformaciones sólo 3 son linealmente independientes, la deformación en Z es combinación de las deformaciones en X y en Y.

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1}{E}(1-\nu)\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{1}{E}(1-\nu)\frac{-E}{\nu}\varepsilon_z \Rightarrow \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)$$ **1 punto**

Las galgas miden la deformación longitudinal unitaria en una dirección cualquiera dada por el vector **n** (α,β,γ) la deformación unitaria viene dada por:

$$\varepsilon_n\left(P,\bar{n}\right) = [n]^T[D][n] == \varepsilon_x\alpha^2 + \gamma_{xy}\alpha\beta + \varepsilon_y\beta^2 - \frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)\gamma^2$$

Aplicamos esta fórmula a las tres galgas de la roseta situada en el punto P:

Galga A: $\left.\begin{array}{l}\alpha_A = 1\\ \beta_A = 0\\ \gamma_A = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_A = -11{,}25 \cdot 10^{-5} = \varepsilon_x$ **0,5 puntos**

Galga B:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_B = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \beta_B = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \gamma_B = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_B = 2{,}5 \cdot 10^{-5} = \varepsilon_x \frac{1}{2} + \gamma_{xy} \frac{-1}{2} + \varepsilon_y \frac{1}{2} \Rightarrow 16{,}25 \cdot 10^{-5} = -\gamma_{xy} + \varepsilon_y$$

Galga C:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_C = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\\ \beta_C = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\\ \gamma_C = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_C = 5 \cdot 10^{-5} = \varepsilon_x \frac{1}{2} + \gamma_{xy} \frac{1}{2} + \varepsilon_y \frac{1}{2} \Rightarrow 21{,}25 \cdot 10^{-5} = \gamma_{xy} + \varepsilon_y$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos: $\left\{\begin{array}{l}\varepsilon_x = -11{,}25 \cdot 10^{-5}\\ \varepsilon_y = 18{,}75 \cdot 10^{-5}\\ \gamma_{xy} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}\end{array}\right.$ **1 punto**

Y sustituyendo: $\varepsilon_z = \dfrac{-0{,}25}{1-0{,}25}\left(-11{,}25 \cdot 10^{-5} + 18{,}75 \cdot 10^{-5}\right) = -2{,}5 \cdot 10^{-5}$

Y la matriz de deformación queda:

$$[D]_P = \begin{bmatrix} -11{,}25 & 1{,}25 & 0 \\ 1{,}25 & 18{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}5 \end{bmatrix} 10^{-5}$$

0,5 puntos

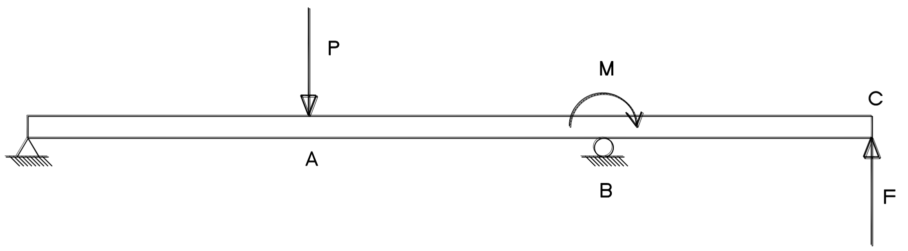
CUESTIÓN 5 (3 puntos)

Se considera la viga de la figura sobre la que pueden actuar una fuerza P en el punto A, un momento M sobre el apoyo B y una fuerza F en el punto C, tal y como se indica en la figura. Se sabe que:

- Cuando actúa una fuerza P de 10 kN en el punto A, dicho punto desciende 1,5 mm, mientras que el punto C asciende 1 mm y la viga experimenta un giro antihorario de 10^{-4} rad en el punto B.
- Cuando actúa un momento M desconocido sobre el apoyo B, el punto A asciende 0,2 mm, el punto C desciende 0,5 mm y la viga experimenta en el apoyo B un giro horario de de $2 \cdot 10^{-4}$ rad.
- Si se impide el movimiento del punto C y se aplica el mismo momento M anterior, en dicho punto aparece una reacción F de 5 kN hacia arriba.

Se pide:

1) Determinar el valor del momento M en mkN.
2) Obtener los nueve (9) coeficientes de influencia indicando sus dimensiones.
3) Calcular el potencial interno del sistema cuanto actúan todas las cargas.



SOLUCIÓN

1) Por el teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti:

$P \cdot (-0{,}2) = M \cdot (-10^{-4})$ $\qquad M = 20$ mkN

1 punto

2) Coeficientes de influencia;

$$\delta_{11} = \frac{1{,}5}{10} = 0{,}15\, mm/kN \qquad \delta_{12} = \frac{-0{,}2}{20} = -10^{-2}\, mm/mkN \Rightarrow \delta_{21} = -10^{-5}\, rad/kN$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{10} = 0{,}1\, mm/kN$$

0,5 puntos

$$\delta_{22} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{20} = 10^{-5}\, rad/mkN \quad \delta_{32} = \frac{-0{,}5}{20} = -2{,}5 \cdot 10^{-2}\, mm/mkN \Rightarrow \delta_{23} = -2{,}5 \cdot 10^{-5}\, rad/kN$$

0,5 puntos

$$\delta_3 = 0 = 20 \cdot \delta_{32} + 5 \cdot \delta_{33} \Rightarrow \delta_{33} = \frac{20 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}}{5} = 0{,}1\, mm/kN$$

0,5 puntos

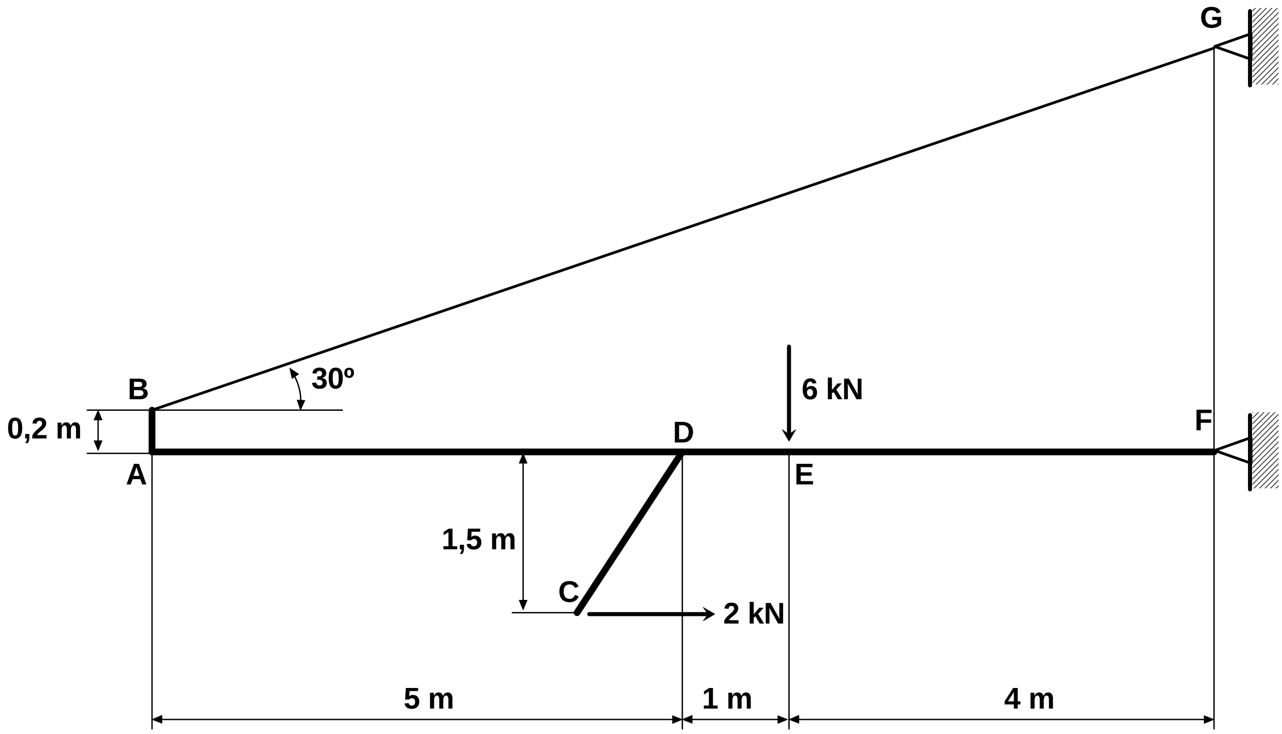
3) El potencial interno vendrá dado por:

$$U = \frac{1}{2}\left(0{,}15 \cdot 10^2 - 10^{-2} \cdot 10 \cdot 20 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 2 + 10^{-5} \cdot 20^2 \cdot 10^3 - 2{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 20 \cdot 2 + 0{,}1 \cdot 5^2\right) = 11{,}25\, J$$

0,5 puntos

PROBLEMA (1 hora y 15 minutos - 10 puntos)

En la figura se puede ver el esquema plano de un sistema de sustentación del tendido eléctrico para ferrocarriles (BG es un cable).



Se pide:

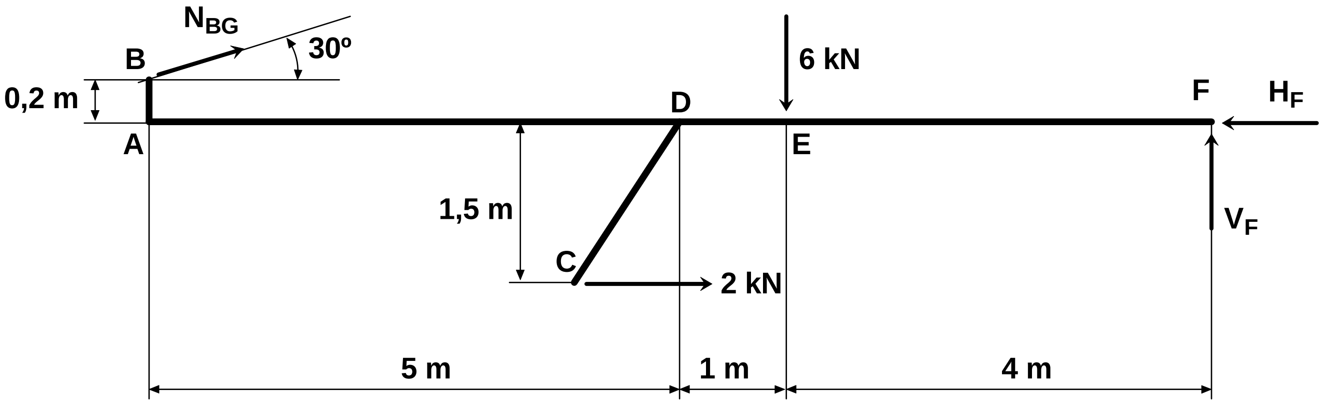
1.- (4 puntos) Reacciones en los apoyos F y G.

2.- (4 puntos) Diagramas acotados de esfuerzos normales, cortantes y momentos flectores **en la barra AF**.

3.- (2 puntos) Alargamiento del cable (E = $2,1 \cdot 10^5$ MPa, A = 80 mm^2).

RESOLUCIÓN

1.- Denominando N_{BG} al esfuerzo normal de tracción sobre el cable, las acciones sobre el conjunto BF son las siguientes.



Aplicando equilibrio de fuerzas y de momentos, se tiene:

$$\sum F_H = 0 \quad \rightarrow \quad N_{BG}\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - H_F = 0$$

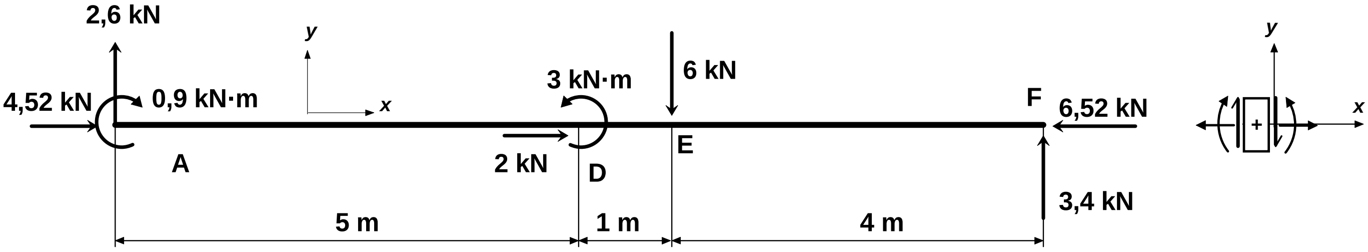
$$\sum F_V = 0 \quad \rightarrow \quad N_{BG}\frac{1}{2} - 6 + V_F = 0$$

$$\sum M_{(F)} = 0 \quad \rightarrow \quad N_{BG}\frac{1}{2}\cdot 10 + N_{BG}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}2 - 2\cdot 1{,}5 - 6\cdot 4 = 0$$

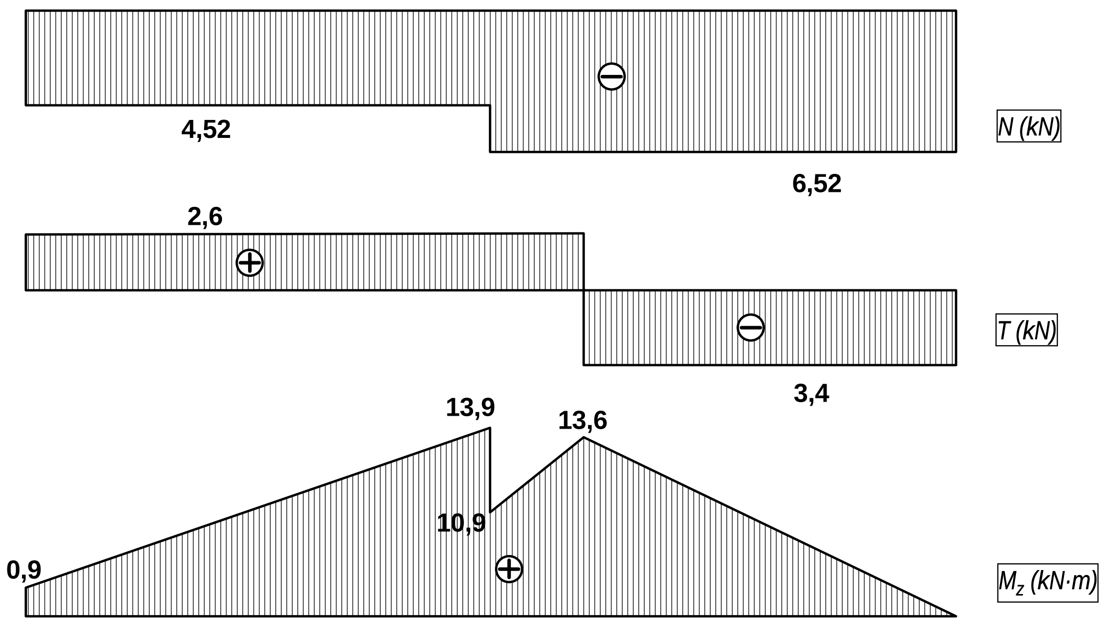
De donde $N_{BG} = 5{,}22\ kN \quad H_F = 6{,}51\,kN \quad V_F = 3{,}40\ kN$

La reacción en G es N_{BG} con sentido contrario al de la figura anterior. (4 puntos)

2.- Como paso previo para el trazado de los diagramas, se trasladan las acciones exteriores a la barra AB y se fija la referencia local y el criterio de signos.



Los diagramas pedidos son los de la figura siguiente:



(4 puntos)

3.- Por ser constante la sección y el esfuerzo normal, así como el módulo de Young, el alargamiento del cable se reduce a $\Delta L = \dfrac{N_{BG} \cdot L_{BG}}{EA}$.

Sustituyendo valores: $$\Delta L = \frac{5{,}22 \cdot 10^{3}\, N \cdot 10^{4} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}}\, mm}{2{,}1 \cdot 10^{5}\, \dfrac{N}{mm^{2}} \cdot 80\, mm^{2}} = 3{,}6\ mm$$ (2 puntos)