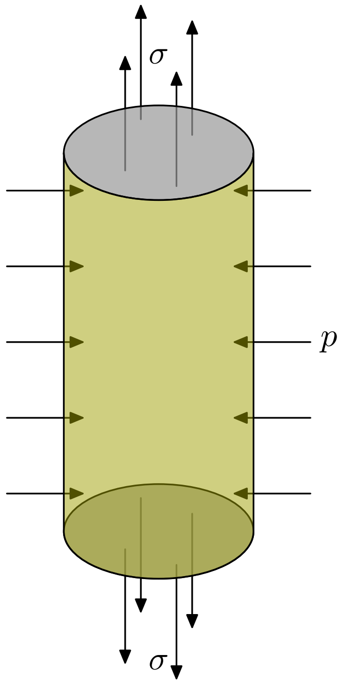
RESISTENCIA DE MATERIALES I
EXAMEN DE JUNIO

CURSO 2012-13
30/5/2013
1h 15 min

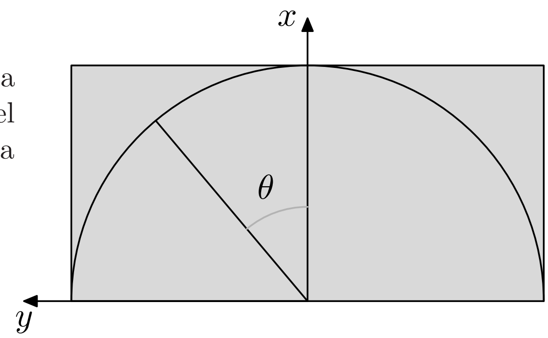
Fecha de publicación de la preacta: 5/6/2013
Fecha y hora de la revisión del examen: 10/6/2013 a las 9:10

---

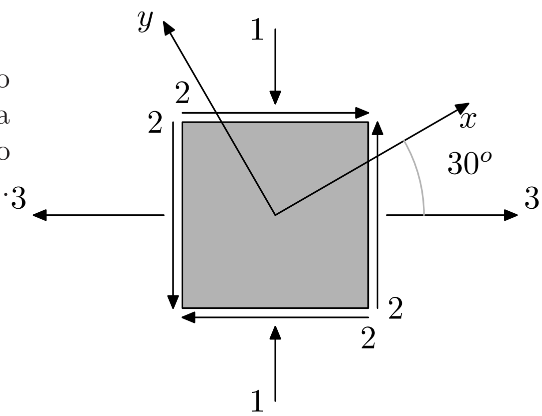
1. El cilindro de la figura es de un material cerámico cuyo fallo puede predecirse con el criterio de Mohr-Coulomb. Se desea conocer la resistencia del material y para ello se realizan dos ensayos. En el primero, la probeta se comprime lateralmente con una presión $p = 2$ MPa; después se tracciona en dirección axial y se observa que el fallo se produce cuando $\sigma = 0,7$ MPa. En el segundo ensayo se emplea una presión lateral de $p = 4$ MPa y la probeta se comprime axialmente, observándose que en este caso el fallo ocurre cuando esta compresión es de 14 MPa. Determinar los límites de rotura a tracción y compresión del material (2,5 puntos).



2. Una chapa rectangular de dimensiones $r \times 2r$ sufre una deformación $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$, $\gamma_{xy} = 2\theta \cdot 10^{-3}$. Determinar el incremento de longitud de la semicircunferencia de la figura debida a la deformación (2,5 puntos).



3. Determina usando el diagrama de Mohr para el estado en tensión plana de la figura las tensiones principales y la expresión del tensor de tensiones $\boldsymbol{T}$ en el sistema xy indicado (NOTA: las tensiones de la figura están en MPa) (2,5 puntos).



4. En una estructura elástica se identifican dos puntos A y B para los cuales la matriz de rigidez (la inversa de la matriz de coeficientes de influencia) es

$$[\boldsymbol{K}] = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ kN/mm}$$

Determina los desplazamientos efectivos en los dos puntos cuando $F_A = 3$ kN y $F_B = -2$ kN, así como la energía elástica almacenada en el sistema (2,5 puntos).

SOLUCIÓN CUESTIONES - RESISTENCIA DE MATERIALES I - 30/5/2013

1. El criterio de Mohr-Coulomb indica que el fallo en un material ocurre cuando se verifica

$$\sigma_1 - \kappa\sigma_3 - \sigma_{rt} = 0 \ ,$$

siendo σ_1 y σ_3 la mayor y menor tensión principal, respectivamente, σ_{rt} el límite de rotura a tracción y $\kappa = \sigma_{rt}/|\sigma_{rc}|$, con σ_{rc} el límite de rotura a compresión. Como en los dos ensayos realizados se llega a la rotura del material se cumple que

$$0.7 + \kappa\, 2 - \sigma_{rt} = 0 \ ,$$
$$-4 + \kappa\, 14 - \sigma_{rt} = 0 \ .$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se sigue que

$$\kappa = 0,392 \qquad \text{y} \qquad \sigma_{rt} = 1.48 \text{ MPa} \ ,$$

por lo que $|\sigma_{rc}| = 3.79$ MPa.

---

2. El vector unitario tangente a la semicircunferencia es $\boldsymbol{\tau} = (-sin\theta, \cos\theta)$ así pues la deformación longitudinal unitaria en un punto cualquiera de la circunferencia es

$$\varepsilon = 10^{-3} \begin{Bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = 10^{-3}\theta\operatorname{sen}(2\theta) \ .$$

El incremento de longitud de la semicircunferencia es por tanto:

$$\Delta L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varepsilon \, \mathrm{d}S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 10^{-3}\theta\operatorname{sen}(2\theta) r \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}10^{-3} \ .$$

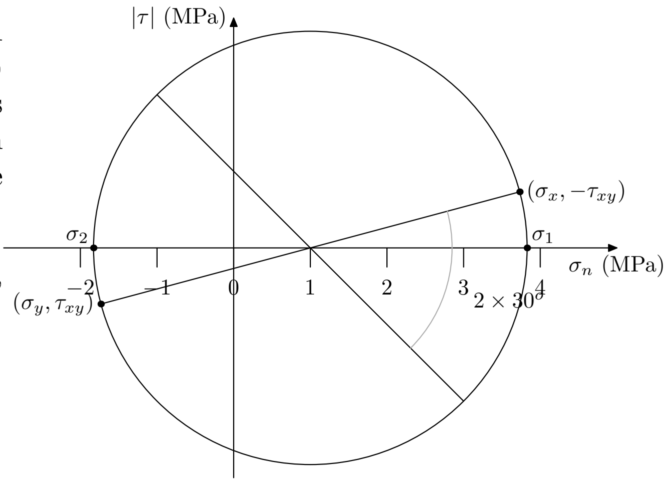
---

3. En la figura se puede ver el diagrama de Mohr del estado tensional, que es un círculo centrado en $(1,0)$ MPa y con radio $r = 2\sqrt{2}$. Las tensiones principales son los puntos $\sigma_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$ MPa. Girando en sentido antihorario 2×30^o los estados tensionales de las caras dadas obtenemos

$$\sigma_x = 1 + r\cos 15 \ , \ \sigma_y = 1 - r\cos 15 \ , \ \tau_{xy} = -r\operatorname{sen} 15 \ ,$$

por lo que

$$[\boldsymbol{T}]_{xy} = \begin{bmatrix} 3.73 & -0.73 \\ -0.73 & -1.73 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



---

4. Calculamos la matriz de coeficientes de influencia, que es la inversa de la matriz de rigidez,

$$[\boldsymbol{\delta}] = [\boldsymbol{K}]^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ mm/kN} \ .$$

A partir de esta matriz calculamos los desplazamientos eficaces de A y B como

$$\begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{\delta}] \begin{Bmatrix} 3 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10/7 \\ -1/7 \end{Bmatrix} \text{ mm}$$

Finalmente, la energía de deformación de la estructura coincide con el trabajo de las fuerzas externas, por ser ésta elástica y lineal, así pues

$$U = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \delta_A \\ \delta_B \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} F_A \\ F_B \end{array} \right\} = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 10/7 \\ -1/7 \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ -2 \end{array} \right\} = \frac{16}{7}\ J$$

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

CURSO 2012-13
30-05-2013

RESISTENCIA DE MATERIALES I
EXAMEN DE JUNIO

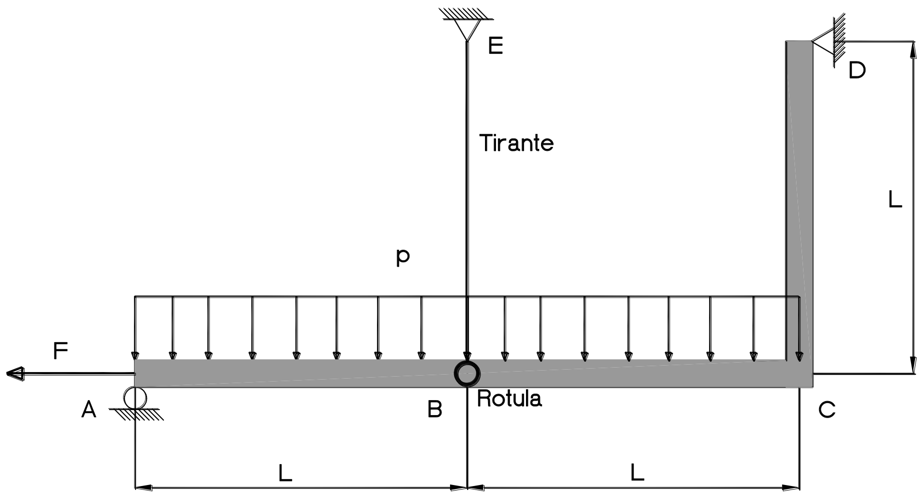
PROBLEMAS (10 puntos)

Fecha de publicación de la preacta: 5 de junio de 2013
Fecha de revisión del examen: 10 de junio de 2013 a las 9:15

PROBLEMA 1 (6 puntos)

En el sistema de barras de la figura:

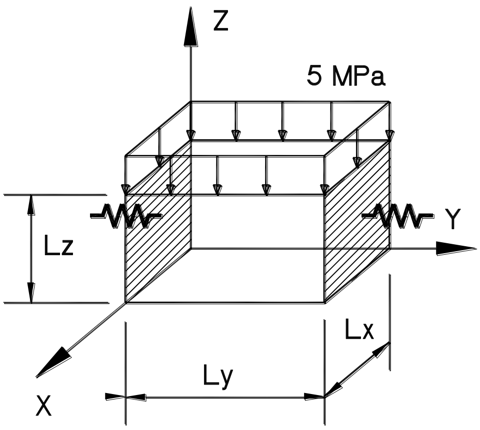
1) Justificar la isostaticidad de la estructura.
2) Calcular las reacciones en los apoyos y la fuerza en el tirante, para L = 5 m, p = 2kN/m, F = 4 kN.
3) Dibujar los diagramas de esfuerzos en la barra ABC, indicando claramente el criterio de signos, el valor de los esfuerzos y sus unidades. Acotar los puntos donde se anulan los esfuerzos y el valor de los máximos/mínimos relativos.



PROBLEMA 2 (4 puntos)

Se tiene un bloque prismático de dimensiones Lx=0,2 m; Ly=0,5 m; Lz=0,2 m que soporta una carga uniformemente repartida en su cara superior de valor igual 5 MPa y el sentido indicado en la figura. El bloque está situado entre dos placas rígidas en contacto con sus caras laterales paralelas al plano XZ y dichas placas están unidas a sendos resortes en dirección Y cuya constante elástica es $K=2\cdot10^4$ kN/m (relación fuerza desplazamiento). Si se considera un estado tensional homogéneo, se pide:

1) Tensor de tensiones
2) Tensor de deformaciones
3) Coeficiente de seguridad según el criterio de Tresca.



Datos:

Módulo de Young: E = 25 GPa
Coeficiente de Poisson: ν = 0,20
Tensión admisible: σ_{adm} = 12 MPa

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

CURSO 2012-13
30-05-2013

SOLUCIÓN PROBLEMA 1

1) El grado de hiperestaticidad debe ser nulo. Si consideramos la fuerza en el tirante como reacción externa:

GH = GH $_{externo}$ + GH $_{interno}$ = (r-3) + (3·c – e) = (4-3) + (0 – 1) = 0, por tanto es isostática

0,5 puntos

2) Reacciones:

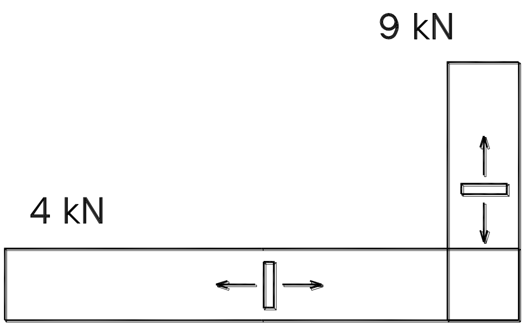
$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_D + T - 2 \cdot 10 = 0 \Rightarrow \boxed{Y_D = 9kN}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -4 + X_D = 0 \Rightarrow \boxed{X_D = 4kN}$$ **0,5 puntos**

$$\sum M_{ZD} = 0 \Rightarrow -Y_A \cdot 10 - 4 \cdot 5 - T \cdot 5 + 2 \cdot 10 \cdot 5 = 0 \Rightarrow \boxed{T = 6kN}$$ **0,5 puntos**

$$M_{Z,rotula} = 0 \Rightarrow -Y_A \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{Y_A = 5kN}$$ **0,5 puntos**

3) **Axiles** (sólo se pide el tramo ABC):

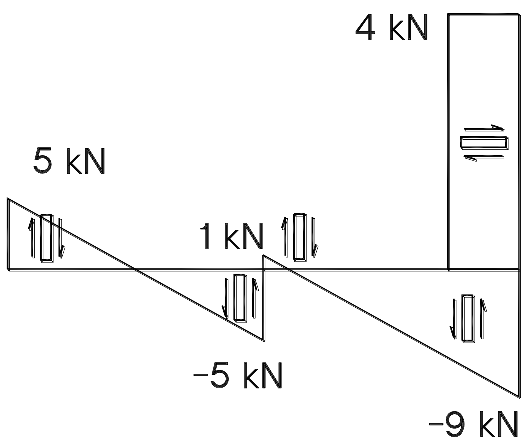


1 punto

Cortantes (sólo se pide el tramo ABC):

Tomado el origen x=0 en el punto A, el cortante se anula en x = 2,5 m y en

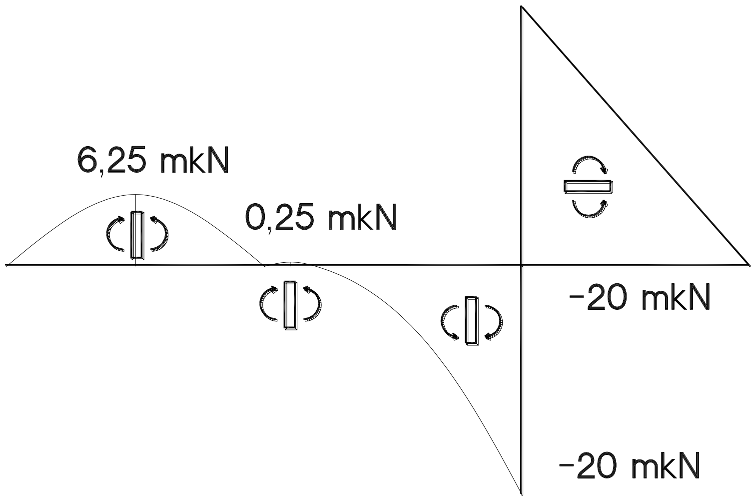
$$T_y = 0 \Rightarrow Y_A + T - 2 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 5{,}5$$



1,5 puntos

Momentos flectores (sólo se pide el tramo ABC):
Tomado el origen x=0 en el punto A, los máximos relativos se dan en x = 2,5 m y en x = 5,5 m.
El momento flector se anula en:

$$M_z = 0 \Rightarrow Y_A \cdot x + T \cdot (x-5) - 2 \cdot \frac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6m \\ x = 5m(rótula) \end{cases}$$



1,5 puntos

SOLUCIÓN PROBLEMA 2

1) Tensor de tensiones.

Del enunciado deducimos:

$\sigma_z = -5MPa \qquad \sigma_x = 0$ **0,5 puntos**

En dirección Y se debe cumplir lo siguiente:

$$K = \frac{F_y}{\delta_y} = \frac{-\sigma_y \cdot L_x \cdot L_z}{\varepsilon_y \cdot L_y / 2} \Rightarrow \sigma_y = -6{,}25 \cdot K \cdot \varepsilon_y = -12{,}5 \cdot 10^4 \varepsilon_y$$ **0,5 puntos**

Aplicando las leyes de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{\nu}{E}\left(5 - \sigma_y\right) \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y + \nu 5\right) \qquad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(-5 - \nu\sigma_y\right)$$ **1 punto**

Resolviendo estas cuatro ecuaciones se obtiene:

$\sigma_y = -0{,}833MPa$

$\varepsilon_x = 4{,}67 \cdot 10^{-5} \qquad \varepsilon_y = 0{,}67 \cdot 10^{-5} \qquad \varepsilon_z = -19{,}33 \cdot 10^{-5}$

Por tanto el tensor de tensiones es:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}833 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} MPa$$ **0,5 puntos**

2) Tensor de deformaciones:

$$D = \begin{bmatrix} 4{,}67 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}67 & 0 \\ 0 & 0 & -19{,}33 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$ **0,5 puntos**

3) Coeficiente de seguridad:

Según el criterio de Tresca: $n = \dfrac{\sigma_{adm}}{\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)} = \dfrac{12}{0+5} = 2{,}4$ **1 punto**