

AMPLIACIÓN DE RESISTENCIA DE MATERIALES Examen extraordinario CURSO 2014-15

Número de matrícula				
<input type="checkbox"/> 0				
<input type="checkbox"/> 1				
<input type="checkbox"/> 2				
<input type="checkbox"/> 3				
<input type="checkbox"/> 4				
<input type="checkbox"/> 5				
<input type="checkbox"/> 6				
<input type="checkbox"/> 7				
<input type="checkbox"/> 8				
<input type="checkbox"/> 9				

Nombre y apellidos:

Número de matrícula:

- Codifique su número de matrícula a la izquierda, colocando un dígito en cada columna (sólo en la primera hoja).
- Conteste las preguntas con bolígrafo o rotulador negro, **rellenando completamente** la casilla de la respuesta correcta (■).
- Marque **sólo una respuesta** en cada pregunta (las preguntas con varias respuestas marcadas se considerarán nulas).
- La puntuación de todas las preguntas es 1. Las respuestas erróneas tienen puntuación negativa ($-1/4$).

1. La viga armada de la figura está constituida por dos barras de sección cuadrada $a \times a$ unidas mediante tornillos de igual diámetro separados a distancia regular e . A la derecha se indica un elemento longitudinal de la viga, de longitud e , con un tornillo en el centro y con la representación de la tensión normal debida a la flexión (compresión por encima del eje z y tracción por debajo). La expresión de la fuerza F que cada barra transmite al tornillo es $F = \frac{Pe}{2I_z} \iint y dA$. Indique el resultado correcto de la expresión en función de P , e y a :

$F = \frac{3Pe}{4a}$

$F = \frac{3Pe}{8a}$

$F = \frac{3Pe}{a}$

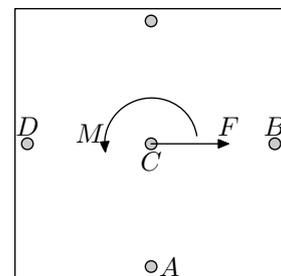
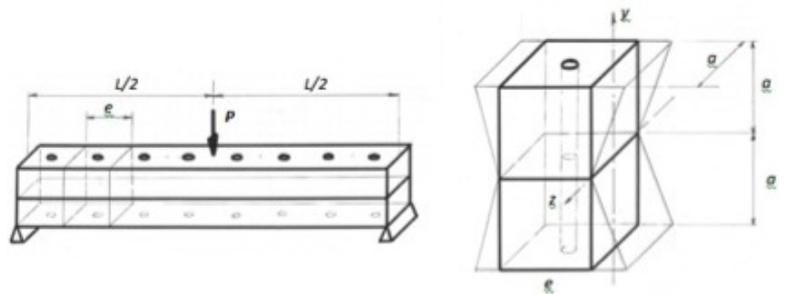
$F = \frac{4Pe}{3a}$

2. La unión atornillada de la figura está sometida a una fuerza F y un par M como se muestra en ésta. Indicar el tornillo más cargado

 B

 A

 D

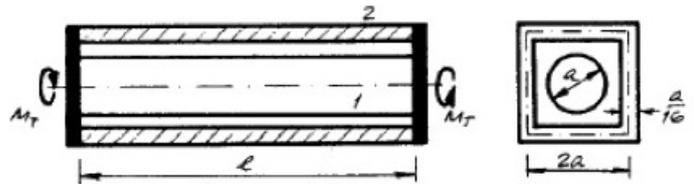
 C


CORRECTED

3. Indique la afirmación CORRECTA en relación con los criterios de fin del régimen elástico dado un estado tensional en un punto de un sólido elástico:

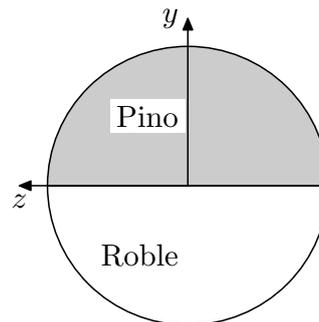
- El criterio más conservador proporcionará menor coeficiente de seguridad
- Si el material es dúctil el criterio de Tresca proporcionará siempre coeficientes de seguridad mayores que el de Rankine
- No se puede asegurar si el criterio es más o menos conservador conociendo únicamente el coeficiente de seguridad
- Si el material es dúctil el coeficiente de seguridad es independiente del criterio de fluencia considerado

4. La barra circular 1 y el tubo cuadrado de pared delgada 2, ambos del mismo material, se encuentran unidos en sus extremos mediante piezas indeformables. Si el conjunto soporta un momento torsor M_T , indique cuál es la afirmación FALSA



- A mayor longitud l del conjunto, mayor energía elástica acumulada
- El momento torsor M_T se distribuye por igual entre la barra 1 y el tubo cuadrado 2 ($M_{T1} = M_{T2}$)
- El ángulo de torsión de la barra 1 y el tubo cuadrado 2 es el mismo ($\theta_1 = \theta_2$)
- La estructura constituye un sistema hiperestático de grado 1

5. Una viga de sección circular se fabrica pegando dos barras de madera de sección semicircular, como se muestra en la figura y está sometida a un momento flector M_z . Sabiendo que el módulo de Young de la madera de roble es $E = 11$ GPa y el de la madera de pino $E = 9$ GPa, indicar la respuesta verdadera:



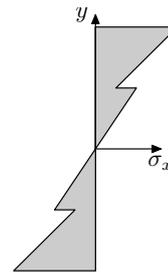
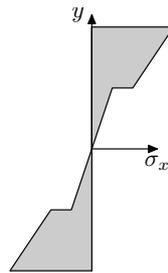
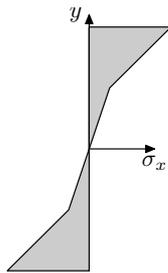
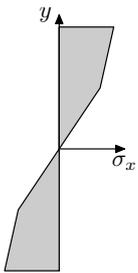
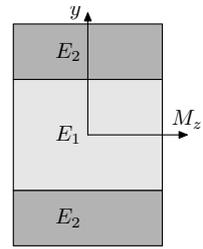
- La fibra neutra es de la forma $y = C$, con $C > 0$.
- La deformación longitudinal máxima, en valor absoluto, se da en la parte de madera de roble.
- La sección transformada de madera de pino tiene forma de elipse.
- La madera de roble sufre tensiones σ_x de tracción y compresión.

6. Indique la afirmación CORRECTA en relación con una sección rectangular sometida a flexocompresión oblicua:

- La orientación de la fibra neutra depende exclusivamente de los valores de los momentos flectores según los ejes principales de la sección.
- El centro de gravedad estará sometido a compresión.
- El lado superior de la sección estará sometido a tensión uniforme de tracción o compresión.
- Los lados superior e inferior de la sección tendrán siempre tensiones iguales pero de distinto signo (tracción o compresión).

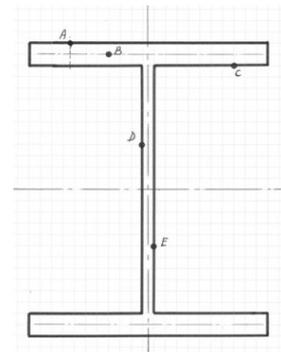
CORRECTED

7. La sección compuesta de la figura está sometida a un momento flector M_z y se sabe que $E_2 > E_1$. Indicar el diagrama correcto de tensiones normales σ_x a lo largo del eje y de la sección:



8. La sección de pared delgada de la figura está sometida a torsión. Indique la afirmación FALSA:

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Las tensiones tangenciales en D y E son iguales y de sentidos opuestos | <input checked="" type="checkbox"/> La tensión tangencial en C es menor que la de E |
| <input type="checkbox"/> La tensión tangencial en A es mayor que la de D | <input type="checkbox"/> La tensión tangencial en B es nula |



9. En un punto de un sólido elástico las tensiones principales son $\sigma_1 = 0$ MPa, $\sigma_2 = -1$ MPa, $\sigma_3 = -3$ MPa. Indique la afirmación falsa:

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Faltan datos sobre el material para evaluar la tensión equivalente según el criterio simplificado de Mohr-Coulomb | <input type="checkbox"/> La tensión equivalente según el criterio de Von Mises es menor de 3 MPa |
| <input checked="" type="checkbox"/> La tensión equivalente según el criterio de Tresca es $\sigma_{eq} = 1$ MPa | <input type="checkbox"/> La tensión equivalente según el criterio de Rankine es $\sigma_{eq} = 3$ MPa |

10. Indique el criterio de fallo para el cual la tensión principal intermedia, σ_2 , tiene influencia:

- | | | | |
|------------------------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Simplificado límite de Mohr | <input type="checkbox"/> Rankine | <input checked="" type="checkbox"/> von Mises | <input type="checkbox"/> Tresca |
|------------------------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------------|

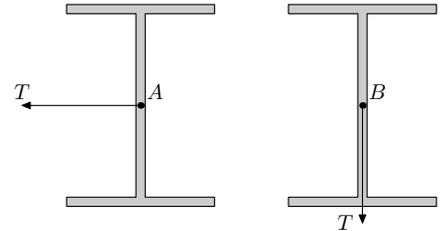
CORRECTED

11. Indique la afirmación CORRECTA en relación con el fin del régimen elástico:

- Un coeficiente de seguridad menor que la unidad indica que se ha superado el régimen elástico.
- El coeficiente de seguridad es independiente del criterio de fluencia considerado.
- Un coeficiente de seguridad menor que la unidad indica que se continúa en régimen elástico
- El coeficiente de seguridad es independiente de las propiedades del material.

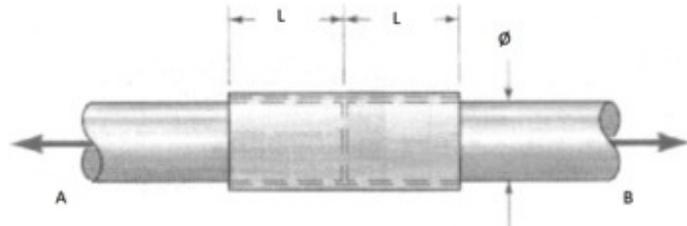
12. Si las dos secciones de pared delgada de la figura son idénticas y están ambas sometidas a esfuerzo cortantes T de mismo módulo pero dirección como indica la figura,

- La tensión tangencial en A es mayor que en B .
- No se puede saber si la tensión tangencial es mayor en A o en B .
- Las tensiones tangenciales en A y B son iguales.
- La tensión tangencial en B es mayor que en A .



13. Los dos extremos de las tuberías A y B de la figura son de igual diámetro y de un mismo material. Se encuentran unidos mediante un casquillo y un adhesivo impregnado en una longitud L en cada extremo. Indique la afirmación CORRECTA relativa a la resistencia de la unión adhesiva para una carga de tracción axial sobre las tuberías:

- Es mayor cuanto menor sea el diámetro Φ
- Es independiente de la rigidez del material de las tuberías
- Es independiente de la longitud L
- Depende del módulo G del material del casquillo



AMPLIACIÓN DE RESISTENCIA DE MATERIALES
EXAMEN DE JULIO

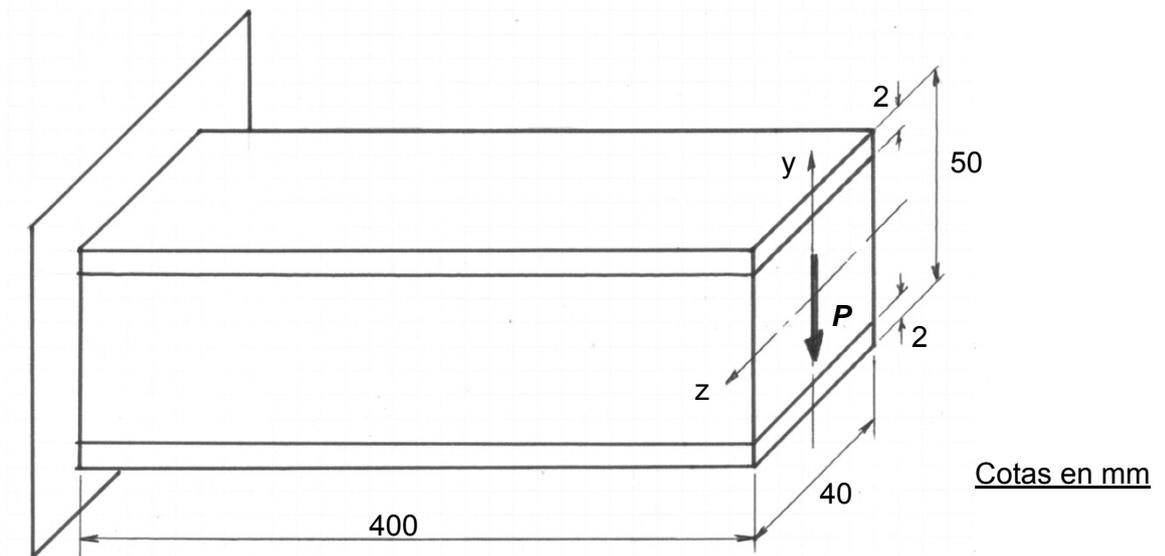
PROBLEMA 1 (10 puntos)

Fecha de publicación de la preacta: 7 julio 2015

Fecha de revisión del examen: 13 de julio a las 16:30

La estructura sándwich de la figura corresponde a un estudio biomecánico sobre un material sintético que modeliza el tejido óseo. Las capas superior e inferior son de poliéster reforzado con fibra de vidrio (Material 1: $E_1 = 60.000\text{MPa}$, $\sigma_{adm1} = 100\text{MPa}$), en tanto que el núcleo es una espuma de poliuretano (Material 2: $E_2 = 5.000\text{MPa}$, $\sigma_{adm2} = 10\text{MPa}$). Suponiendo que se mantiene la continuidad entre las zonas de unión de los dos materiales, se pide:

- 1º) Valor de la carga P compatible con la resistencia de la estructura a flexión
- 2º) Para el valor de P hallado, representar la distribución de tensión normal en el plano xy de la sección más crítica
- 3º) Para el valor de P hallado, determinar la mínima resistencia a la cortadura que debe tener el adhesivo que une los dos materiales
- 4º) Para el valor de P hallado, hallar la tensión tangencial máxima que se da en el poliuretano



1º) Momento flexor máximo en el empotramiento: $M_{2mx} = -P \cdot 400$

Tensiones de flexión máximas:

$$\sigma_1 = \frac{M_{2mx} E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} y_{1mx}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_{2mx} E_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} y_{2mx}$$

Cálculos: (otas en mm)

$$y_{1mx} = 25 \quad ; \quad y_{2mx} = 25 - 2 = 23$$

$$I_1 = 2 \left(\frac{1}{12} 40 \cdot 2^3 + 40 \cdot 2 \cdot 26^2 \right) = 92.213,3 \text{ mm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} 40 \cdot (50 - 4)^3 = 324453,3 \text{ mm}^4$$

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 = 60000 \text{ MPa} \cdot I_1 + 5000 \text{ MPa} \cdot I_2 = 1155066667 \text{ MPa mm}^4$$

$$\sigma_1 = \frac{P \cdot 400 \cdot E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} y_{1mx} = 0,084 P \leq \sigma_{adm1} = 100 \text{ MPa}$$

$$\text{Para el material 1: } P_{mx} = \frac{100}{0,084} = 1190,5 \text{ N}$$

$$\sigma_2 = \frac{P \cdot 400 \cdot E_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} y_{2mx} = 0,0064 P \leq \sigma_{adm2} = 10 \text{ MPa}$$

$$\text{Para el material 2: } P_{mx} = \frac{10}{0,0064} = 1555,4 \text{ N}$$

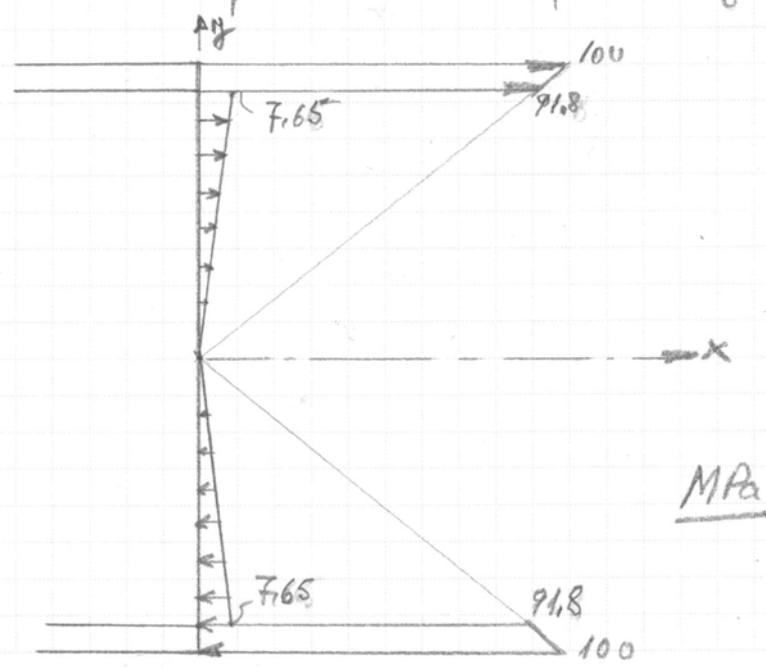
Luego la carga P compatible con la resistencia de la estructura a flexión es $P = 1190,5 \text{ N}$, y la estructura falla a flexión por el material 1. (5)

2º) Representación de σ para la sección del empotramiento en el plano XY :

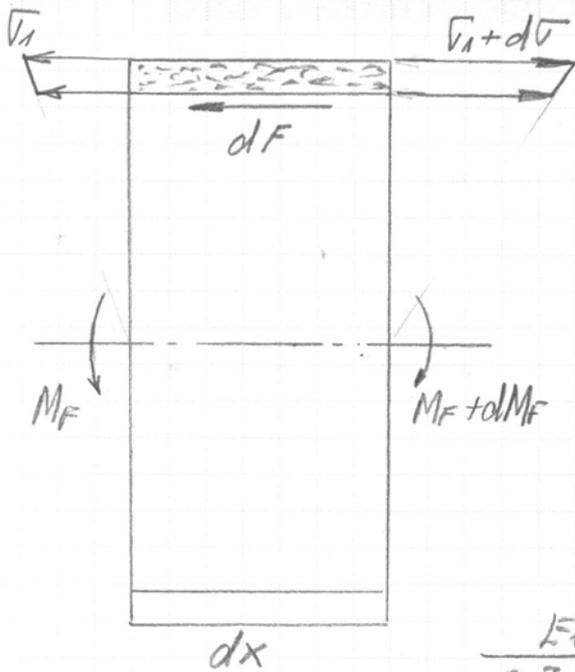
$$\sigma_1 (y = 23) = 91,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 (y = 25) = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 (y = 23) = 7,65 \text{ MPa}$$



3º) Mínima resistencia del adhesivo que une los dos materiales



Equilibrio de un diferencial de longitud de la capa superior:

$$dF = \iint_1 dV dA = \iint_1 \frac{E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} dM_F y dA = \frac{E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} T dx M_z (y=23 \text{ mm})$$

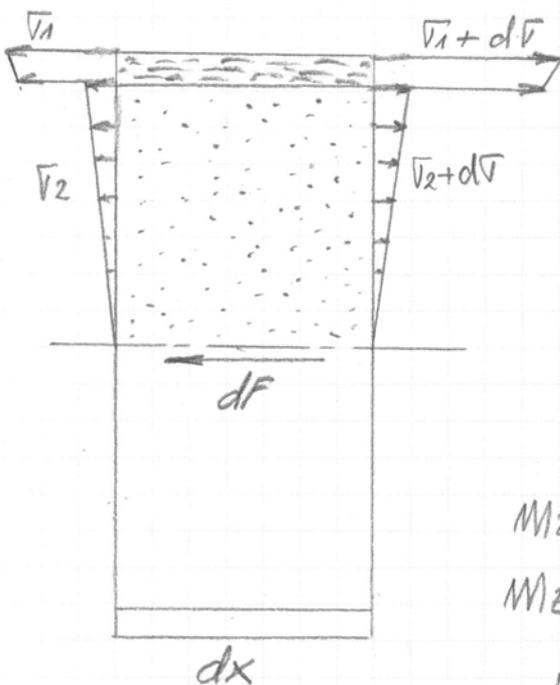
$$\tau = \frac{dF}{b dx} = \frac{E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \frac{T}{b} M_z (y=23 \text{ mm})$$

$$\frac{E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} = 8,38 \cdot 10^{-6} / \text{mm}^4 ; b = 40 \text{ mm}$$

$$T = P = 1190,5 \text{ N} ; M_z (y=23) = 40 \cdot 2 \cdot 24 = 1920 \text{ mm}^3$$

Sustituyendo: $\tau = 0,48 \text{ MPa}$

4º) Tensión tangencial máxima en el poliuretano:



Equilibrio de un diferencial de longitud de la mitad superior (τ_{max} en $y=0$):

$$dF = \iint_1 dV_1 dA + \iint_2 dV_2 dA =$$

$$= \frac{E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} T dx M_{z1} + \frac{E_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} T dx M_{z2}$$

$$M_{z1} = M_z (y=23) = 1920 \text{ mm}^3$$

$$M_{z2} = 40 \cdot 23 \cdot \frac{23}{2} = 10580 \text{ mm}^3$$

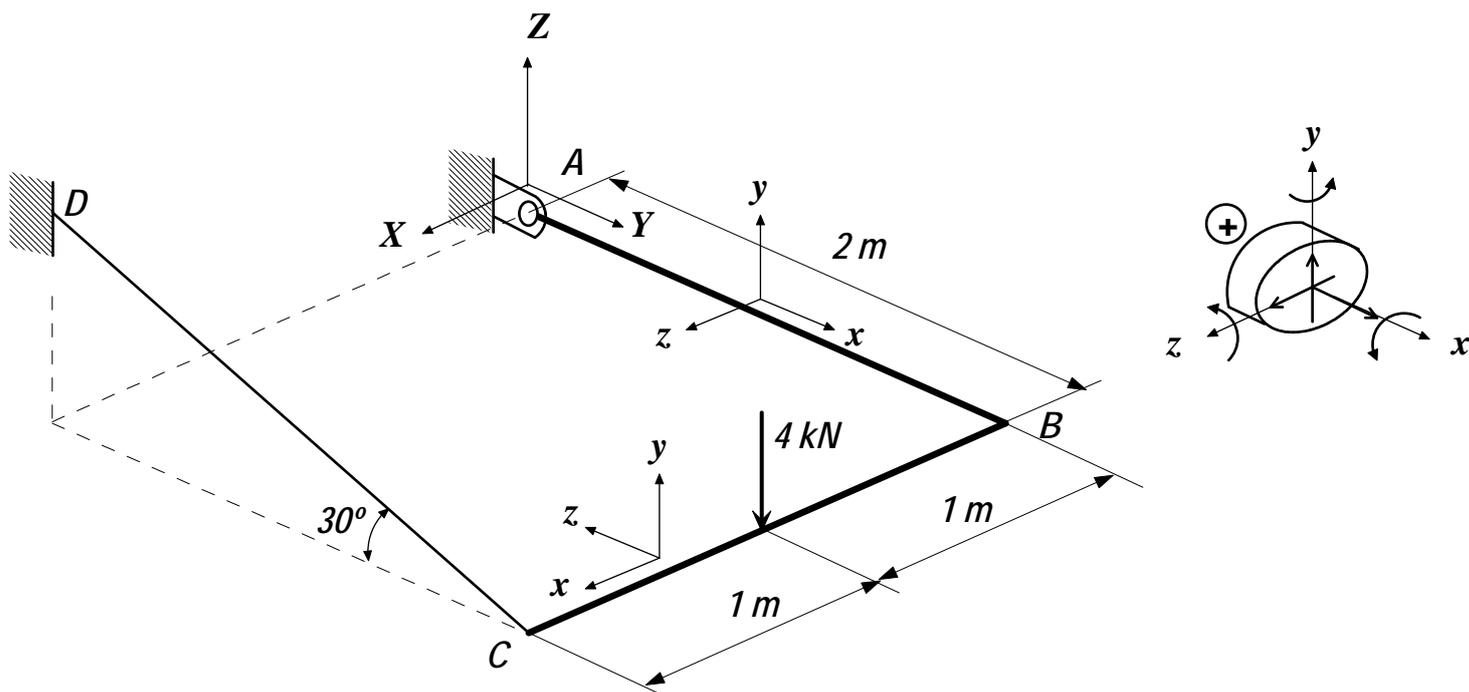
$$\frac{E_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} = 6,97 \cdot 10^{-7} / \text{mm}^4$$

$$\tau = \frac{dF}{b dx} = 0,48 + 0,22 = 0,7 \text{ MPa}$$

③

PROBLEMA 2 (10 puntos)

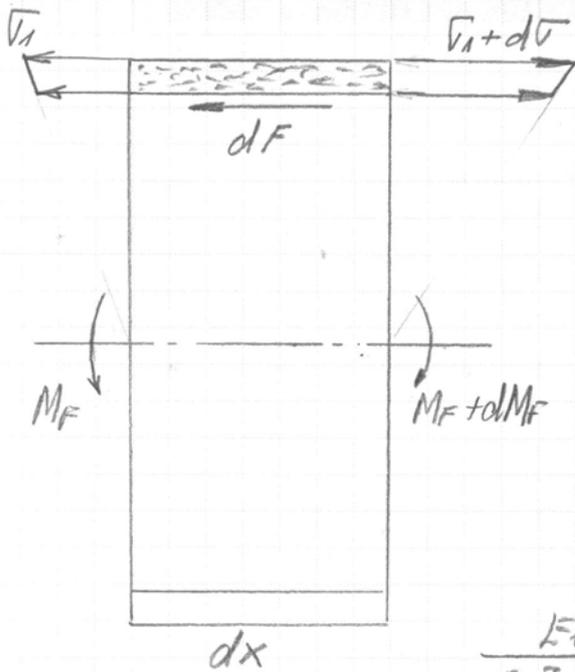
La estructura de la figura está formada por dos barras AB y BC y por un cable CD, todos ellos de acero ($E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, $G = 0,8 \cdot 10^5$ MPa). El apoyo A impide todos los desplazamientos y giros excepto el giro con respecto al eje global X.



Se pide:

- 1.- Esfuerzo normal en el cable (1 punto).
- 2.- Para las referencias locales xyz y el criterio de signos tridimensional de la figura, dibuje los diagramas acotados de esfuerzos en el conjunto ABC (3 puntos).
- 3.- Sabiendo que AB y BC están formadas por un perfil normalizado rectangular 120.100.5, indique si el eje de mayor inercia de la sección debe estar orientado según el eje local y o z en ambas barras para que la tensión equivalente de Mises sea mínima (1 punto).
- 4.- Para la orientación elegida en el apartado anterior, y despreciando los radios de acuerdo del perfil, compruebe que no se sobrepasa el límite elástico ni en AB ni en BC empleando el criterio de Mises (acero S275) (3 puntos).
- 5.- Desplazamiento vertical del punto C, en milímetros (2 puntos).

3º) Mínima resistencia del adhesivo que une los dos materiales



Equilibrio de un diferencial de longitud de la capa superior:

$$dF = \iint_1 dV dA = \iint_1 \frac{E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} dM_F y dA =$$

$$= \frac{E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} T dx M_z (y=23 \text{ mm})$$

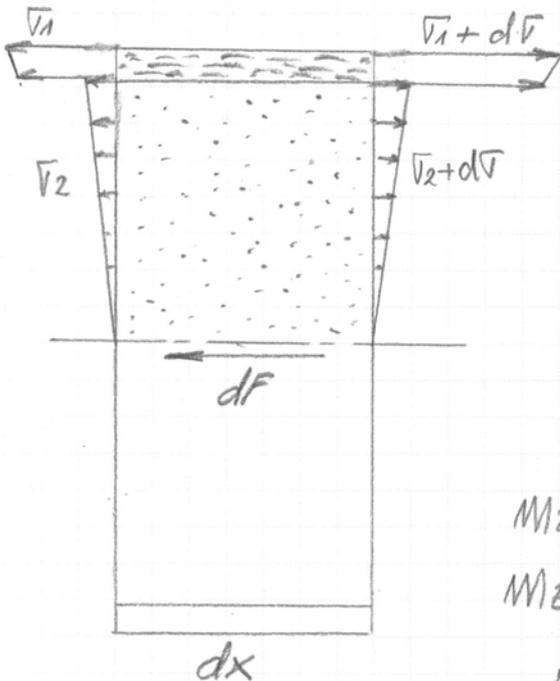
$$\tau = \frac{dF}{b dx} = \frac{E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \frac{T}{b} M_z (y=23 \text{ mm})$$

$$\frac{E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} = 8,38 \cdot 10^{-6} / \text{mm}^4 ; b = 40 \text{ mm}$$

$$T = P = 1190,5 \text{ N} ; M_z (y=23) = 40 \cdot 2 \cdot 24 = 1920 \text{ mm}^3$$

Sustituyendo: $\tau = 0,48 \text{ MPa}$

4º) Tensión tangencial máxima en el poliuretano:



Equilibrio de un diferencial de longitud de la mitad superior (τ_{max} en $y=0$):

$$dF = \iint_1 dV_1 dA + \iint_2 dV_2 dA =$$

$$= \frac{E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} T dx M_{z1} + \frac{E_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} T dx M_{z2}$$

$$M_{z1} = M_z (y=23) = 1920 \text{ mm}^3$$

$$M_{z2} = 40 \cdot 23 \cdot \frac{23}{2} = 10580 \text{ mm}^3$$

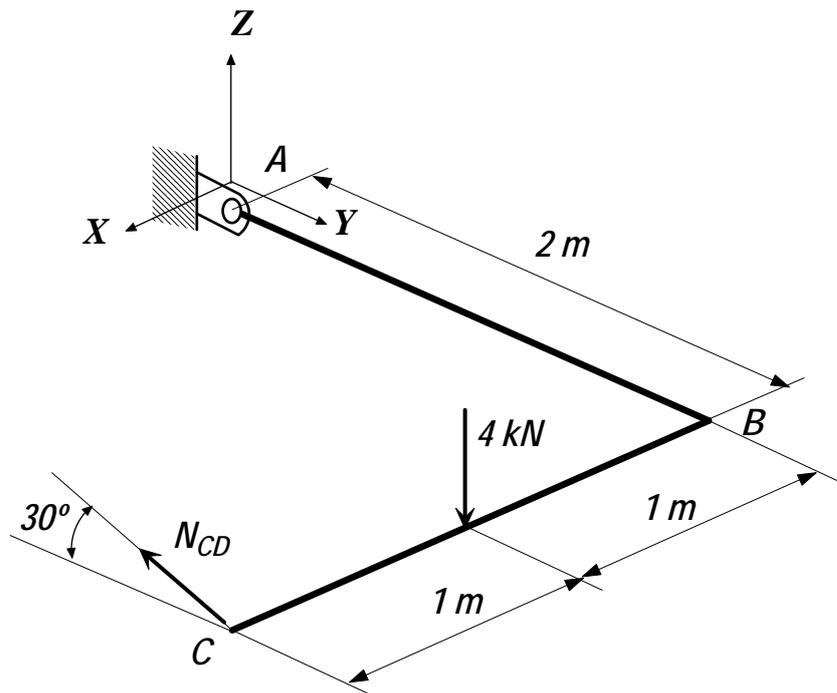
$$\frac{E_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} = 6,97 \cdot 10^{-7} / \text{mm}^4$$

$$\tau = \frac{dF}{b dx} = 0,48 + 0,22 = 0,7 \text{ MPa}$$

③

RESOLUCIÓN

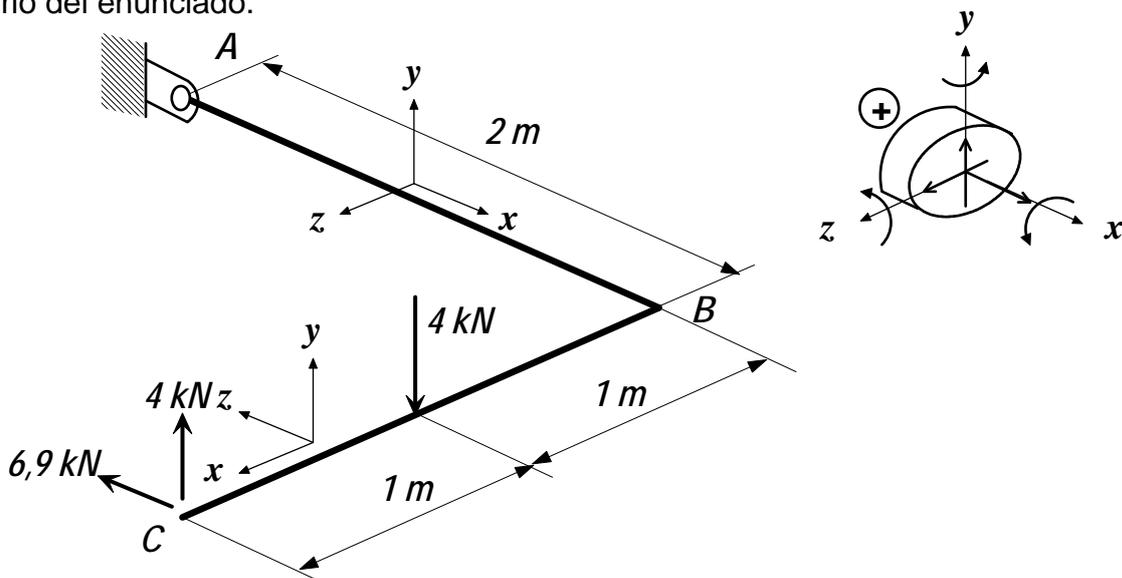
1.- Eliminando el cable, la estructura queda:



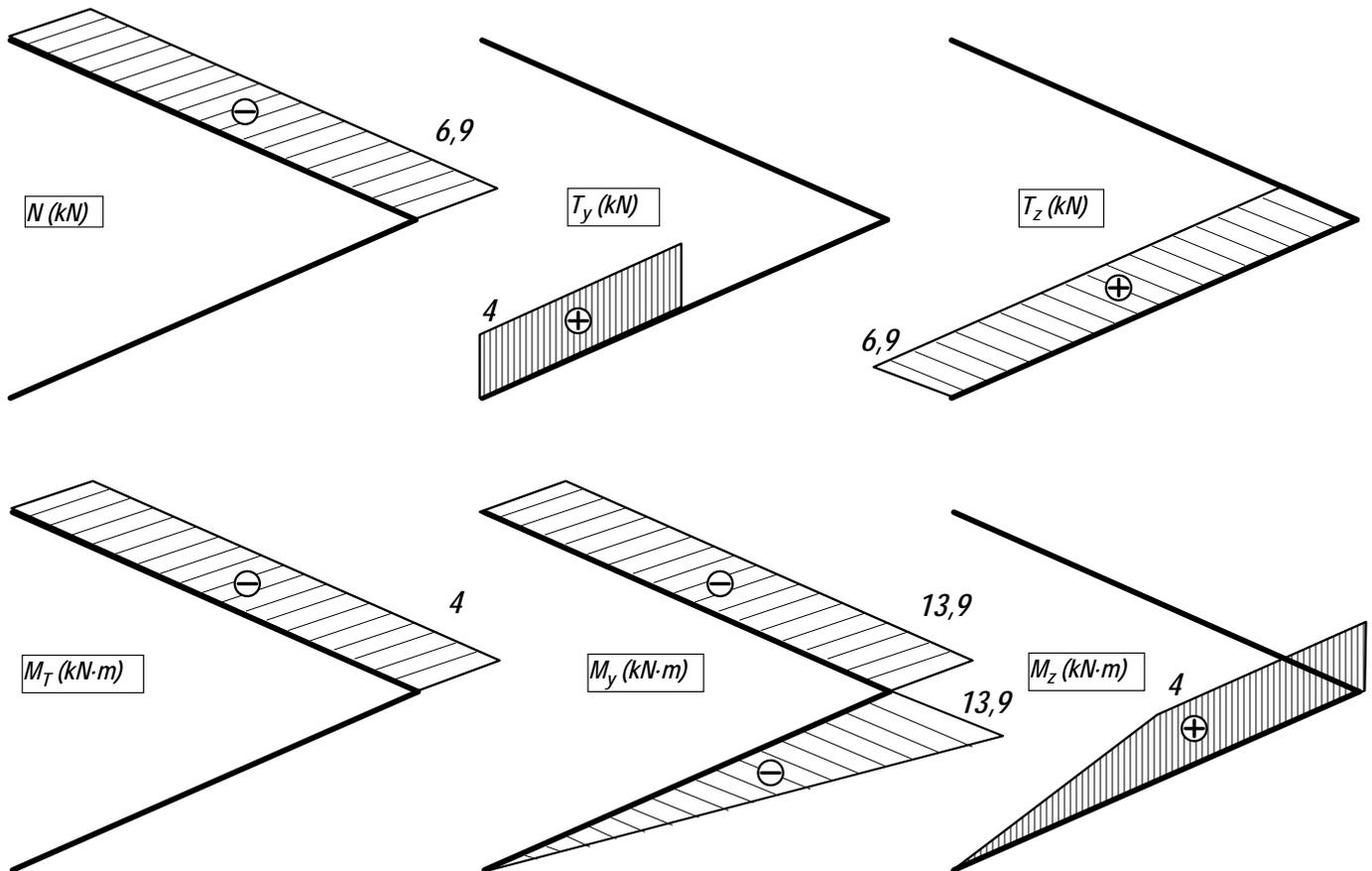
Al plantear el equilibrio de momentos respecto al eje X, se obtiene el esfuerzo N_{CD} pedido.

$$\frac{N_{CD}}{2} \cdot 2m - 4kN \cdot 2m = 0 \rightarrow N_{CD} = 8kN$$

2.- Para obtener los diagramas, se proyecta el esfuerzo normal y se va eliminando imaginariamente la parte de la estructura que queda del lado del eje local x creciente. Los esfuerzos son, en tal caso, positivos si van en el sentido de los ejes locales xyz , según el criterio del enunciado.



Los diagramas resultantes son los siguientes:



3.- A la vista de los diagramas, la barra AB está sometida a flexión (según el eje y), y a torsión; la barra BC está sometida a flexión en los dos ejes (flexión oblicua). Las tensiones debidas a los esfuerzos cortantes son despreciables por ser las barras de gran longitud frente a su canto.

Para la barra AB, si σ es la tensión normal de flexión y τ la cortante debida a la torsión, el criterio de Mises tiene por expresión $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} < \sigma_e$ (el criterio de Tresca queda como $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < \sigma_e$). Como el perfil es de espesor constante, la tensión de torsión en la sección es la misma en los cuatro lados del rectángulo, por lo que la tensión de Mises se minimiza al minimizar la tensión de flexión, lo que ocurre si el eje de mayor módulo resistente (que coincide con el de máxima inercia), se orienta según el eje de flexión, esto es, según y .

Para la barra BC, el criterio de Mises (y el de Tresca), resulta ser $|\sigma| < \sigma_e$, por lo que minimizar la tensión de Mises equivale a minimizar la tensión de flexión, lo que se consigue orientando el eje de máxima inercia según el eje de máximo momento flector, es decir, nuevamente según y .

4.- Barra AB: Todas las secciones son igualmente desfavorables.

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_y|}{W_y}, \text{ siendo } W_y \text{ el valor } W_x \text{ de las tablas de perfiles: } 68,6 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Sustituyendo valores: } |\sigma|_{\max} = \frac{13,9 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}}{68,6 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} = 203 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{|M_T|}{2eA^*}. \text{ Sustituyendo: } \tau_{\max} = \frac{4 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}}{2 \cdot 5 \text{ mm} \cdot 115 \text{ mm} \cdot 95 \text{ mm}} = 37 \text{ MPa}$$

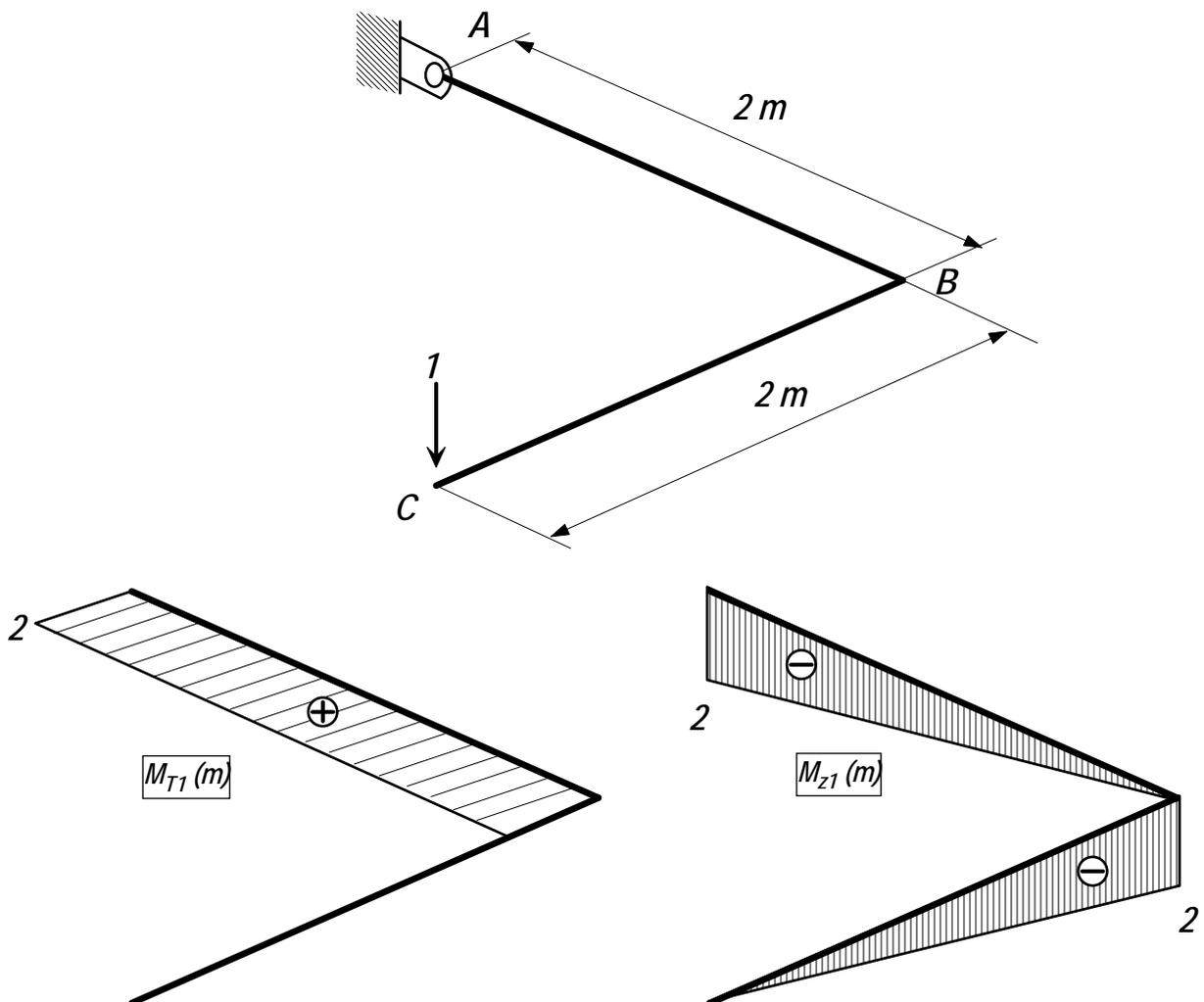
Introduciendo en el criterio de Tresca, y teniendo en cuenta que el límite elástico es 275 MPa, por ser el espesor inferior a 16 mm, se tiene:

$$\sqrt{203^2 + 3 \cdot 37^2} = 213 \text{ MPa} < 275 \text{ MPa} \quad (\text{Régimen elástico})$$

Barra BC: La sección más desfavorable es la B.

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \rightarrow 203 \text{ MPa} + \frac{4 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm}}{62,2 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} = 267 \text{ MPa} \quad (\text{Régimen elástico})$$

5.- Se emplea el método de la carga unidad, despreciando la contribución al movimiento de los esfuerzos normales y cortantes frente a la de torsores y flectores. El sistema virtual y sus diagramas de momentos no nulos son los siguientes.



Como los diagramas de M_z y M_T tienen tramos de valor nulo, la expresión del desplazamiento eficaz se reduce a:

$$\delta_1 = \int_{AB} \frac{M_T \cdot M_{T1}}{G I_T} dx + \int_{CD} \frac{M_z \cdot M_{z1}}{E I_z} dx$$

Las leyes de torsores en AB son uniformes, no así las de flector en CD:

$$M_z(x) = \begin{cases} 4 & x < 1 \text{ m} \\ 4(2-x) & x \geq 1 \text{ m} \end{cases} \quad (\text{kN}\cdot\text{m si } x \text{ en m})$$

$$M_{z1}(x) = -1(2-x) \quad \forall x \quad (\text{en m si } x \text{ en m})$$

Las inercias se obtienen de tablas: $I_T = 583 \text{ cm}^4$, $I_z = 311 \text{ cm}^4$ (no debe olvidarse que el eje de mayor inercia coincide con y).

Sustituyendo en las integrales, y aplicando factores de conversión apropiados para las unidades empleadas, se tiene:

$$\delta_1 = \int_0^{2000 \text{ mm}} \frac{-4 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ mm}}{0,8 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 583 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} dx + \int_0^{1000 \text{ mm}} \frac{-4 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} \cdot (2000 - x) \text{ mm}}{2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 311 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} dx +$$

$$+ \int_{1000 \text{ mm}}^{2000 \text{ mm}} \frac{-4 \cdot 10^3 (2000 - x) \text{ N}\cdot\text{mm} \cdot (2000 - x) \text{ mm}}{2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 311 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} dx$$

$$\delta_1 = -34,3 \text{ mm} - 3,1 \text{ mm} - 2,0 \text{ mm} = -39,4 \text{ mm}$$

De los resultados se aprecia que, a pesar de haber empleado un perfil cerrado, el desplazamiento debido a la torsión es claramente predominante. Además, al ser negativo el valor, significa que el desplazamiento es contrario a la carga unidad: El desplazamiento de C es ascendente, lo que es contrario a la lógica.

El error, pese a que los cálculos anteriores son correctos, se encuentra en que es necesario añadir la contribución del alargamiento del cable, lo cual no es posible debido a la ausencia de datos en el enunciado sobre la rigidez del mismo. La contribución del

alargamiento del cable al desplazamiento de C vendría dada por la integral $\delta_1 = \int_{CD} \frac{N \cdot N_1}{EA} dx$, que es claramente positiva por serlo las dos leyes de esfuerzos. Por tanto, si bien el cable puede eliminarse de cara a obtener los esfuerzos y las tensiones en las barras, no puede despreciarse su contribución en el cálculo de desplazamientos.