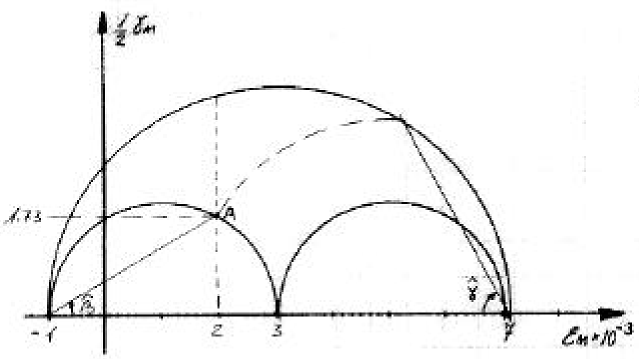
ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES. CURSO 1.999/2.000
EXAMEN FINAL DE SETIEMBRE. 5.09.2000

SOLUCIÓN CUESTIONES (Bloque 1)

1.-En un punto de un sólido elástico las deformaciones principales son: $e_1=7\cdot10^{-3}$; $e_2=3\cdot10^{-3}$; $e_3=-1\cdot10^{-3}$
Determinar el vector unitario de la dirección que corresponde a la deformación transversal unitaria mínima de entre las que presentan deformaciones longitudinales $e_n=2\cdot10^{-3}$, referida a un sistema de ejes coincidentes con las direcciones principales.



Punto A: $\varepsilon_n=2\cdot10^{-3}$, $\frac{1}{2}\gamma_n$ mínima

Al pertenecer a $C_1 \rightarrow \alpha=0$

$tg\,\hat{\beta}=1{,}73/3 \rightarrow \hat{\beta}=30^\circ \rightarrow \hat{\gamma}=60^\circ$

$\alpha=\cos\hat{\alpha}=0$
$\beta=\cos\hat{\beta}=0{,}866=\sqrt{3}/2$
$\gamma=\cos\hat{\gamma}=0{,}5=1/2$

El vector pedido es: $\boxed{\vec{u}(0, \sqrt{3}/2, 1/2)}$

2.- La matriz de tensiones y el vector de fuerzas de volumen, referidos ambos a un sistema cartesiano *xyz*, son:

$$T=\begin{pmatrix} ax^2 & bxy & az^2 \\ bxy & ay^2 & byz \\ az^2 & byz & az^2 \end{pmatrix} \qquad f_V=\begin{pmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{pmatrix}$$

Determinar las relaciones que deben existir entre las constantes *abc* y el coeficiente de Poisson *m* del material para que el estado de tensiones supuesto sea una posible solución de un problema elástico.

De los datos del enunciado se tiene:

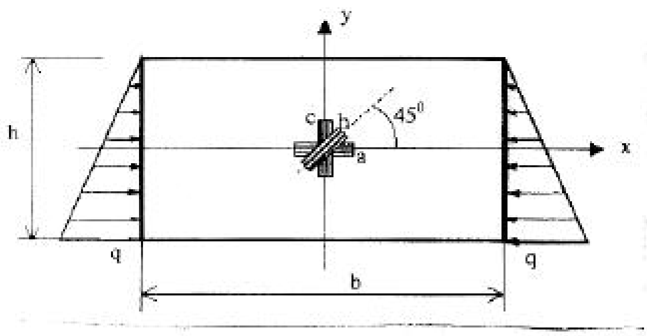
$s_{nx}=ax^2$, $s_{ny}=ay^2$, $s_{nz}=az^2$, $t_{yx}=bxy$, $t_{zx}=az^2$, $t_{zy}=byz$, $X=cx$, $Y=cy$, $Z=cz$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio interno se obtiene:

$2az+x(c+2a+b)=0$
$c+2(b+a)=0$
$c+b+2a=0$

de donde se deduce: $a=b=c=0$

3.- Una placa delgada de espesor unitario y dimensiones *bxh* está sometida a una distribución lineal de carga tal como se indica en la figura. Siendo *q* el máximo valor de la carga y suponiendo conocidos los módulos de Young, *E*, y el coeficiente de Poisson, *m*, del material de la placa, se pide determinar el potencial interno acumulado en la placa y los valores que marcan las galgas extensométricas situadas en el centro de la placa e indicadas en la figura.



Solución de tensiones:

$\sigma_{nx} = \frac{q}{2}\left(\frac{2y}{h}-1\right)$; $\sigma_{ny} = \tau_{xy} = 0$

En el punto (0,0): $\sigma_{nx} = -q/2$

$\sigma_{ny} = \tau_{xy} = 0$

Potencial interno:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\iiint \sigma_{nx}\varepsilon_x\,dV = \frac{1}{2}\iint \frac{\sigma_{nx}^2}{E}\,dx\,dy\,1 =$$

$$= \frac{b}{2E}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{q}{2}\left(\frac{2y}{h}-1\right)\right)^2 dy = \boxed{\frac{bh}{6E}q^2}$$

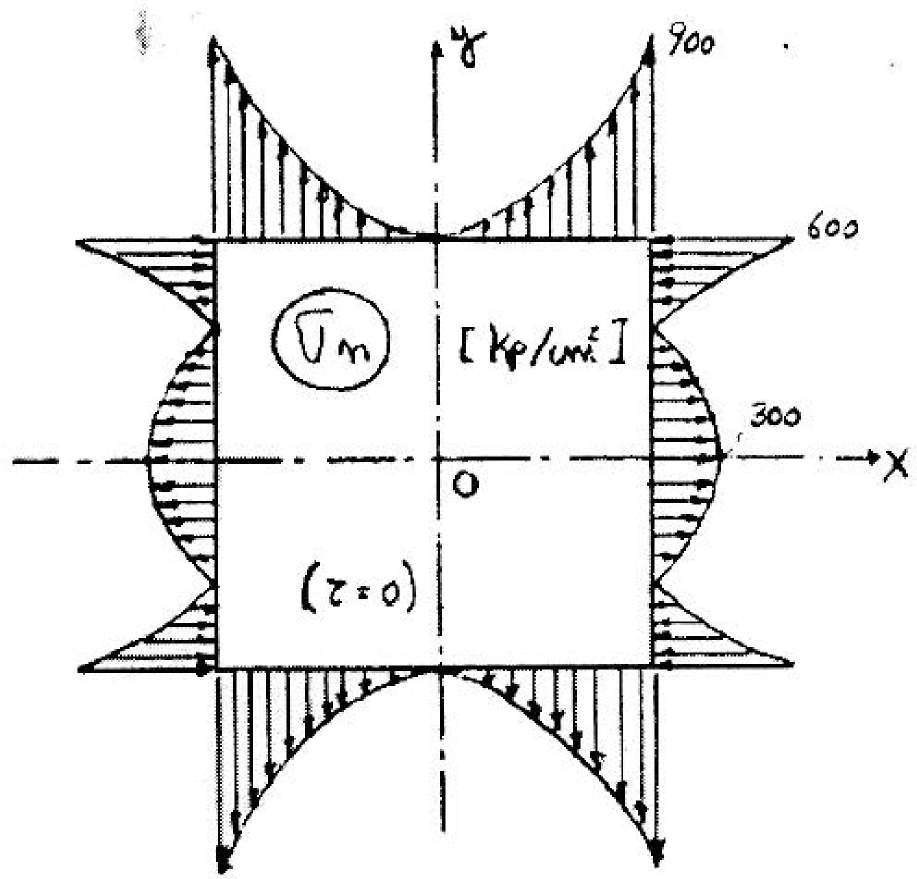
Valores de las galgas:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_a &= \varepsilon_x = \sigma_{nx}/E = -q/2E \\ \varepsilon_c &= \varepsilon_y = -\mu\sigma_{nx}/E = \mu q/2E \\ \varepsilon_b &= \varepsilon_x(\sqrt{2}/2)^2 + \varepsilon_y(\sqrt{2}/2)^2 = \frac{-q}{4E}(1-\mu) \end{aligned}}$$

4.- Una placa delgada cuadrada de *60x60cm*, está sometida a un estado tensional plano con fuerzas de volumen constantes. Para un sistema de referencia cartesiano *xy* centrado en el centro de la placa y con los ejes orientados según los bordes de la misma, la función de Airy es:

$$f = \frac{x^4}{12} - \frac{y^4}{12} + 150y^2$$

Viniendo expresadas las correspondientes tensiones en kp/cm^2 cuando las coordenadas se expresan en *cm*. Se pide representar las fuerzas de superficie sobre los bordes de la placa.



5.- La matriz de tensiones en un punto de un sólido elástico es

$$(T) = \begin{pmatrix} -30 & 30 & 30\sqrt{2} \\ 30 & 30 & 0 \\ 30\sqrt{2} & 0 & 30 \end{pmatrix} MPa$$

El material constituyente tiene un límite elástico a tracción de 150MPa y a compresión de 300MPa. Determine el correspondiente coeficiente de seguridad según los criterios de Rankine, Tresca, Von Mises y Mohr y dibujar en el diagrama de Mohr los círculos límite para cada criterio tomando como escala *[10MPa°5mm]*.

Tensiones principales: $\sigma_1 = 60\ MPa$ $\quad \sigma_2 = 30\ MPa$ $\quad \sigma_3 = -60\ MPa$

Criterio de Rankine: $M = \dfrac{\sigma_{et}}{\sigma_1} = \dfrac{150}{60} = 2,5$

Criterio de Tresca: $M = \dfrac{\sigma_{et}}{\sigma_1 - \sigma_3} = \dfrac{150}{120} = 1,25$

Criterio de Von Mises: $M = \dfrac{\sqrt{2}\,\sigma_{et}}{\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}} = 1,386$

Criterio de Mohr: $M = \dfrac{\sigma_{et}}{\sigma_1 - \sigma_{et}/|\sigma_{ec}| \cdot \sigma_3} = 1,66$

Para cada criterio, el círculo límite corta al eje de abscisas del diagrama de Mohr en $(M\sigma_3, M\sigma_1)$, luego: