



CUESTIONES

1.- En un punto P de un sólido elástico las tensiones principales son:

$$\sigma_1 = 15 \text{ MPa} ; \sigma_2 = 5 \text{ MPa} ; \sigma_3 = -5 \text{ MPa}$$

Determinar el plano al que corresponde un vector tensión tal que su módulo es $5\sqrt{3}$ MPa

y que forma con su normal un ángulo $\vartheta = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Sea $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ el vector característico del plano

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 &= (5\sqrt{3})^2 = 75 \Rightarrow 15^2 \alpha^2 + 5^2 \beta^2 + (-5)^2 \gamma^2 = 75 \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{u} &= \sigma_n \Rightarrow 15\alpha^2 + 5\beta^2 - 5\gamma^2 = 5\sqrt{2} \\ |\vec{u}| &= 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{aligned} \right\}$$

Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, cuyas soluciones son:

$$\alpha^2 = 0,25 ; \beta^2 = 0,7071 ; \gamma^2 = 0,0429$$

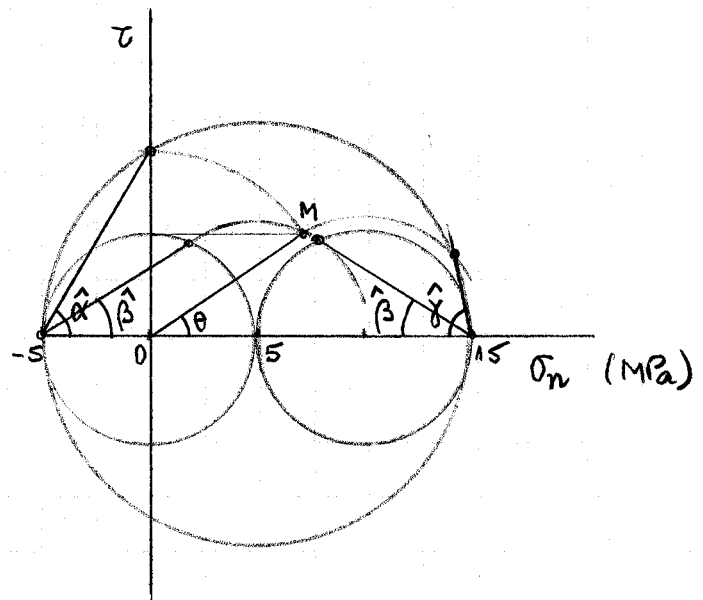
es decir, el plano pedido viene definido por

$$\vec{u} (0,5 ; 0,8408 ; 0,2071)$$

Al mismo resultado se llega gráficamente aplicando los círculos de Mohr, como se indica en la fig.

El punto M tiene de coordenadas:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_n &= 5\sqrt{3} \cos \theta = 5\sqrt{2} \text{ MPa} \\ \tau &= 5\sqrt{3} \sin \theta = 5 \text{ MPa} \end{aligned} \right.$$

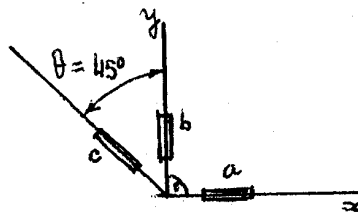


2.- En un punto de la superficie plana de un sólido elástico se colocan las tres galgas extensométricas indicadas en la figura.

Después de cargado el sólido, la lectura dadas por las galgas son las siguientes:

$$\varepsilon_a = 8 \times 10^{-3} ; \varepsilon_b = 2 \times 10^{-3} ; \varepsilon_c = 3 \times 10^{-3}$$

Calcular la variación del ángulo definido por las galgas b y c, indicado si aumenta o disminuye.



De las lecturas de las galgas se deduce la matriz de deformación referida al sistema de ejes indicados en la figura

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x = 8 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_y = 2 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_c = 3 \times 10^{-3} = 8 \times 10^{-3} \frac{1}{2} + 2 \times 10^{-3} \frac{1}{2} - \gamma_{xy} \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \gamma_{xy} = 2 \times 10^{-3}$$

La variación del ángulo que forman las galgas b y c es:

$$\Gamma_{bc} = \frac{2 [\vec{u}_b]^T [D] [\vec{u}_c] - (\varepsilon_b + \varepsilon_c) \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\left. \begin{aligned} [D] [\vec{u}_c] &= 10^{-3} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \\ [\vec{u}_b]^T [D] [\vec{u}_c] &= (0, 1) \begin{pmatrix} -6/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times 10^{-3} = 0 \end{aligned} \right\} \boxed{\Gamma_{bc} = -5 \times 10^{-3} \text{ rad}}$$

El signo negativo nos indica que θ aumenta

3.- En un punto P de un sólido elástico, cuyo módulo de elasticidad es $E = 2 \cdot 10^5$ MPa existe un estado tensional del que se conocen los valores de dos de las tensiones principales: 80 MPa y 40 MPa.

Sabiendo que el cuerpo no ha experimentado variación de volumen, se pide calcular el valor de la otra tensión principal en los dos supuestos siguientes:

a)- Si el coeficiente de Poisson toma el valor $\mu = 0,25$

b)- Si $\mu = 0,5$ y el alargamiento unitario en la dirección de la tensión principal desconocida es $0,5 \cdot 10^{-4}$

a) De las leyes de Hooke generalizadas, se deduce

$$e = \frac{\theta}{E} (1 - 2\mu) \Rightarrow \theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{eE}{1 - 2\mu} = 0$$

Por consiguiente: $80 + 40 + \sigma = 0 \Rightarrow \sigma = -120 \text{ MPa}$

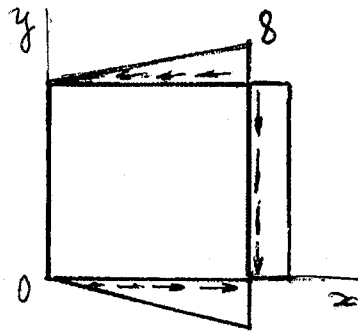
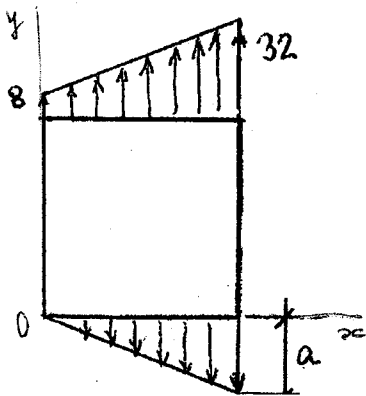
Las tensiones principales en este caso son: $\sigma_1 = 80 \text{ MPa}; \sigma_2 = 40 \text{ MPa}; \sigma_3 = -120 \text{ MPa}$

b) Si $\mu = 0.5$ el coeficiente $\nu = \frac{E E}{1 - 2\mu}$ es indeterminado.

En este caso, la otra tensión principal se obtiene aplicando la ley de Hooke generalizada: $0.5 \times 10^{-4} = \frac{1}{2 \times 10^5} [\sigma - 0.5(80 + 40)]$
de donde $\sigma = 70 \text{ MPa}$. Las tensiones principales son:

$$\sigma_1 = 80 \text{ MPa}; \sigma_2 = 70 \text{ MPa}; \sigma_3 = 40 \text{ MPa}$$

4.- Una placa cuadrada cuyo lado mide 4 cm está sometida en su contorno al sistema de cargas normales y cortantes que se indica en la figura, expresadas en kp/cm^2 . Se pide calcular el valor que debe tener a para que la placa esté en equilibrio.



Imponiendo las condiciones de equilibrio

$$\sum F_y = 0 ; \quad \frac{8+32}{2} \times 4 - \frac{1}{2} a \times 4 - 8 \times 4 = 0$$

$$\text{se obtiene: } 80 - 2a - 32 = 0 \Rightarrow a = 24 \text{ kp/cm}^2$$

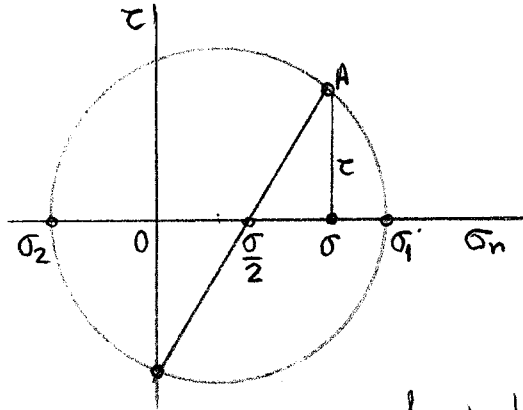
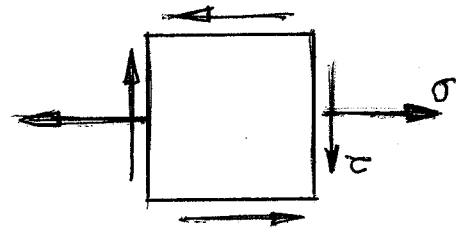
Veamos si para este valor de a , se verifica la condición de momento nulos. Tomando momentos respecto de O tenemos:

$$8 \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} (32 - 8) \times 4 \times \frac{2}{3} 4 - \frac{1}{2} 24 \times 4 \times \frac{2}{3} 4 -$$

$$- 8 \times 4 \times 4 + \frac{1}{2} 8 \times 4 \times 4 = 64 + 128 - 128 - 128 + 64 = 0$$

Luego, en efecto: $a = 24 \text{ kp/cm}^2$

5.- Expresar el criterio de Von Mises en un punto de una pieza sometida a flexión simple en el que las tensiones normal y tangencial son σ y τ , respectivamente.



Del círculo de Mohr se deducen fácilmente las tensiones principales:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \end{cases}$$

Sustituyendo estas expresiones en el criterio

de von Mises:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_e^2$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + 4\left[\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2\right] = 2\sigma_e^2$$

Simplificando, se obtiene:

$$\boxed{\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_e^2}$$