ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE
INGENIEROS INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE
MADRID

ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES **CURSO 1999-2000**

PRIMER EXAMEN PARCIAL **9-2-2000**

CUESTIONES (BLOQUE 1)

1.- La matriz de tensiones en un punto P de un sólido elástico, referida a un sistema de referencia cartesiano ortogonal Oxyz, es:

$$(T) = 10\begin{pmatrix} \sigma_{nx} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \sigma_{nz} \end{pmatrix} MPa$$

Si las tensiones principales en el punto P son: $\sigma_1 = 30$ MPa ; $\sigma_2 = 10$ MPa y $\sigma_3 = -10$ MPa calcular los valores de σ_{nx} y σ_{nz}.

Al observar la matriz de tensiones se deduce que $10\sigma_{nx}$ MPa es una tensión principal. Las otras dos son las raíces de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 10-\sigma & 20 \\ 20 & 10\sigma_{nz}-\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma^2 - (10+10\sigma_{nz}) + 100\sigma_{nz} - 400 = 0$$

Discusión:

a) Si $10\sigma_{nx} = 30$: $\sigma_{nx} = 3$; $10+10\sigma_{nz} = 0$; $100\sigma_{nz} - 400 = -100$ Solución no válida

b) Si $10\sigma_{nx} = 10$: $\sigma_{nx} = 1$; $10+10\sigma_{nz} = 20$; $100\sigma_{nz} - 400 = -300 \Rightarrow \sigma_{nx} = 1$; $\sigma_{nz} =$

c) Si $10\sigma_{nx} = -10$: $\sigma_{nx} = -1$; $10+10\sigma_{nz} = 40$; $100\sigma_{nz} - 400 = 300$ Solución no válida

Por tanto, los valores pedidos son: $\boxed{\sigma_{nx} = 1 \ ; \ \sigma_{nz} = 1}$

2.- En un punto P de un sólido elástico la matriz de tensiones, referida a un sistema de referencia cartesiano ortogonal, es:

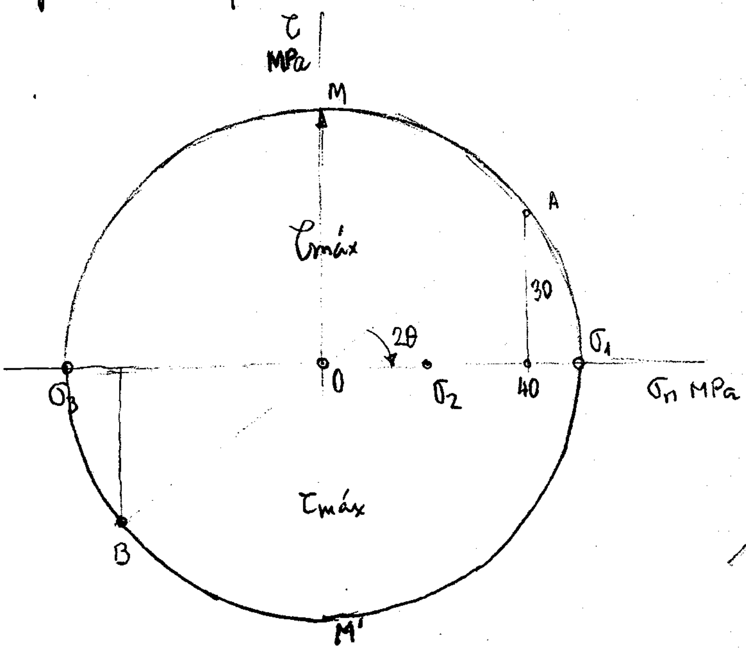
$$(T) = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & -30 \\ 0 & -30 & -40 \end{pmatrix} MPa$$

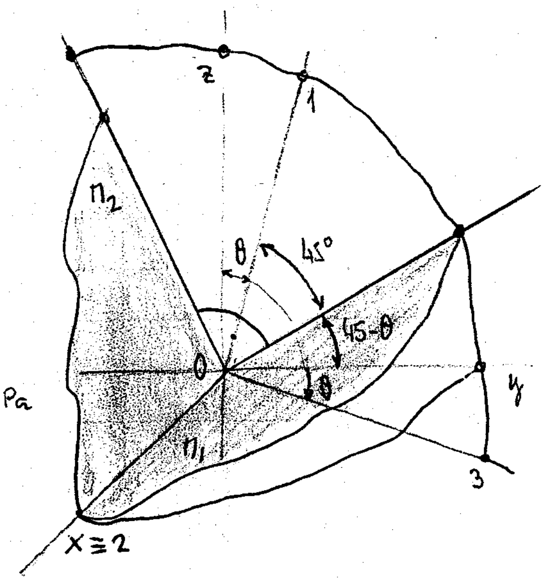
Calcular el ángulo que forma con el plano xOy el plano que pasa por P y está sometido a la máxima tensión de cortadura.

Del círculo de Mohr se deduce que el eje x es el eje principal que corresponde a la tensión intermedia σ_2

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{30}{40} = 0,75 \Rightarrow 2\theta = 36,8698° \Rightarrow \theta = 18,435°$$

Existen dos planos que están sometidos a la máxima tensión de cortadura y son los que corresponden a los puntos M y M' indicados en el círculo de Mohr



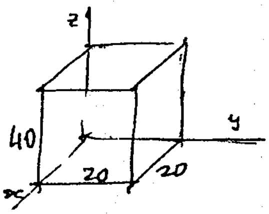


Los ángulos pedidos son:

$$\boxed{45-\theta = 26^\circ\, 33'\, 54''} \quad y \quad \boxed{45-\theta+90 = 116^\circ 33' 54''}$$

3.- En el cuerpo elástico de forma prismática indicado en la figura se produce un campo de desplazamientos definido por :

$u = k\cdot(x^2 + y)$
$v = k\cdot(x + y^2)$
$w = k\cdot z^2$



(Cotas en cm)

siendo k una constante $k = 10^{-4}$ cuando las coordenadas se expresan en dm. Se pide calcular:

1º)- La variación angular máxima en el centro del prisma.

2º)- La variación de volumen experimentada por el prisma en la deformación.

1º Las componentes de la matriz de deformación son:

$$\varepsilon_x = 2kx\ ;\quad \varepsilon_y = 2ky\ ;\quad \varepsilon_z = 2kz\ ;\quad \frac{1}{2}\gamma_{xy} = k\ ;\quad \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = 0$$

La ecuación característica en el centro del prisma P(1, 1, 2) dm es:

$$\begin{vmatrix} 2k-\varepsilon & k & 0 \\ k & 2k-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 4k-\varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

de la que obtenemos las deformaciones principales

$$\varepsilon_1 = 4k\ ;\quad \varepsilon_2 = 3k\ ;\quad \varepsilon_3 = k$$

la variación angular máxima pedida es:

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\gamma_n\right)_{máx}} = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{2} = \frac{4k-k}{2} = 1{,}5\,k = \boxed{1{,}5\times 10^{-4}\ rad.}$$

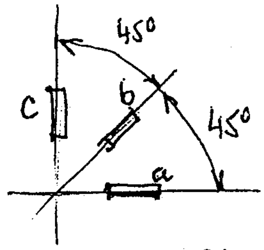
2º La dilatación cúbica unitaria en los puntos del prisma es:

$$e = 2K(x+y+z)$$

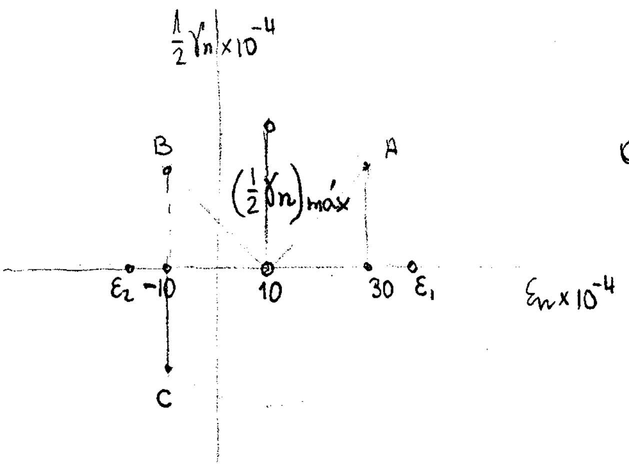
$$\frac{d\,\Delta V}{dV} = 2K(x+y+z) \Rightarrow \boxed{\Delta V} = \iiint 2K(x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \boxed{128\times10^{-4}\ dm^3}$$

4.- Sobre la superficie de un sólido elástico sometido a un estado plano de tensiones, las medidas dadas por las tres galgas extensométricas de una roseta rectangular son las siguientes:

$\varepsilon_a = 30\text{x}10^{-4}$; $\varepsilon_b = -10\text{x}10^{-4}$; $\varepsilon_c = -10\text{x}10^{-4}$



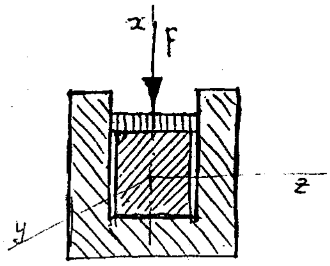
Calcular cuál sería la medida que daría una galga colocada sobre la superficie en la dirección en la que se produce la máxima deformación angular.



Del círculo de Mohr se deduce que la lectura de la galga será

$$\boxed{\varepsilon_n = 10\times10^{-4}}$$

5.- En el interior de un cilindro rígido de acero, de radio interior R = 12 cm, se introduce, coaxialmente con él, otro de una aleación de cobre, de radio r = 11,999 cm, según se indica en la figura.



Mediante una fuerza F = 50kN que actúa sobre un pistón de peso y rozamiento despreciables colocado sobre el cilindro interior, se comprime éste.

Calcular la presión que ejerce el acero sobre el cilindro de aleación de cobre.

Datos de la aleación de cobre: μ = 0,34 ; E = 115 GPa

Las paredes laterales del cilindro de aleación de cobre no llegan a tocar a las paredes del cilindro de acero, ya que

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\frac{\sigma_{nx}}{E} = -\mu\frac{F}{E\pi r^2} = 3{,}27\times10^{-6} \qquad \boxed{\sigma_{ny}=\sigma_{nz}=0}$$

$$\Delta r = 3{,}27\times10^{-6}\times 119{,}99\ mm = 3{,}92\times10^{-6}\ mm < 0{,}01\ mm$$

Por tanto, la única presión que ejerce el acero sobre el cobre es en la base inferior

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{F}{\pi r^2} = -1{,}106\ MPa}$$