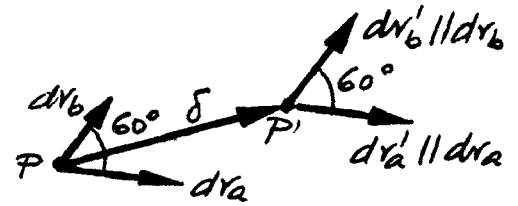


CUESTIONES (BLOQUE 2)

6.- En un sólido sometido a un estado plano se considera un punto cuyo estado de deformación no es esférico. Se pide determinar la orientación respecto a las direcciones principales de las parejas de direcciones $\vec{u}_a, \vec{u}_b$, que formando inicialmente un ángulo de 60° conservan su orientación en el plano después de la deformación.



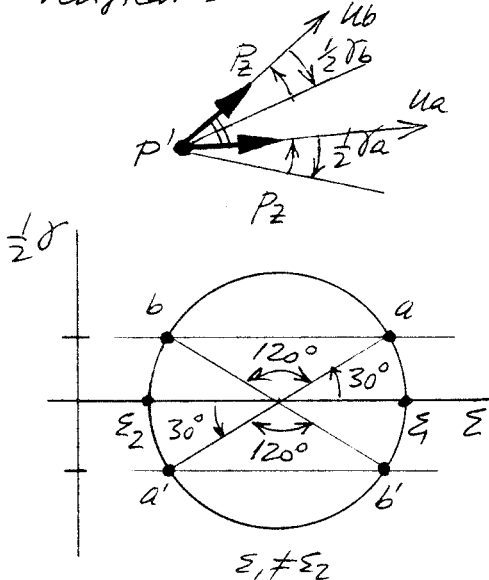
Para que dos direcciones $\vec{u}_a, \vec{u}_b$ conserven su orientación se tendrá que verificar:

$$\frac{1}{2}\gamma_a = \frac{1}{2}\gamma_b = P_2$$

es decir, que las deformaciones transversales sean iguales (en módulo y signo), e iguales al giro del entorno.

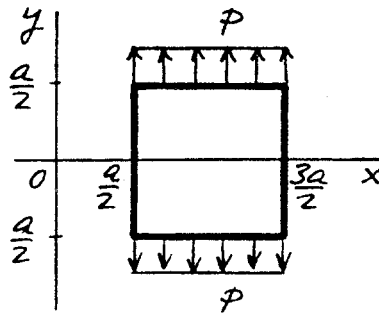
En el círculo de Mohr tendremos que los puntos a, b deben estar en una recta paralela al eje Σ y separados $2 \times 60 = 120^\circ$, lo que da lugar a las dos soluciones:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\gamma > 0 & P_2 > 0 & \hat{u}_1 \hat{u}_a = \hat{u}_b \hat{u}_2 = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ \\ \frac{1}{2}\gamma < 0 & P_2 < 0 & \hat{u}_2 \hat{u}_a = \hat{u}_b \hat{u}_1 = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ \end{cases}$$



7.- Como consecuencia del proceso de fabricación, el material de la placa cuadrada sometida a tensión plana indicada en la figura tiene un módulo elástico variable, que respecto al sistema de referencia Oxy tiene como expresión:

$$E = \frac{a^2}{x^2 + 3y^2} E_0$$



siendo E_0 el valor en el centro de la placa.

El coeficiente de Poisson no se ha visto afectado y permanece constante.

Sabiendo que al someter la placa al sistema de fuerzas indicado, el estado tensional resultante es homogéneo, se pide determinar el coeficiente de Poisson del material.

Al tratarse de un estado tensional homogéneo, por equilibrio en el contorno obtenemos =

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0; \quad \sigma_{yy} = p; \quad \sigma_{xy} = 0 \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \mu \sigma_{yy}) = -\frac{\mu}{E} p \\ \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \mu \sigma_{xx}) = \frac{1}{E} p \end{cases}$$

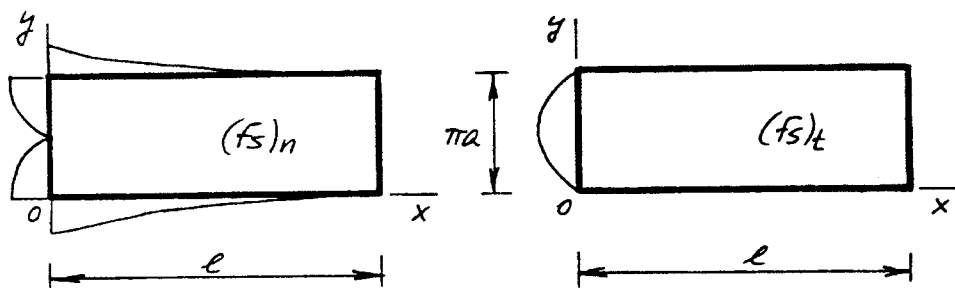
Obligando a que se cumpla la ecuación de compatibilidad =

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$-\mu p \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{E} \right) + p \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{E} \right) = 0$$

$$-\mu p \frac{6}{a^2 E_0} + p \frac{2}{a^2 E_0} = 0 \quad \text{de donde } \mu = \frac{1}{3}$$

8.- Una placa rectangular muy larga ($l \gg \pi a$) se encuentra sometida a la distribución de fuerzas cuyo módulo se indica en los diagramas, siendo nulas las fuerzas de volumen.



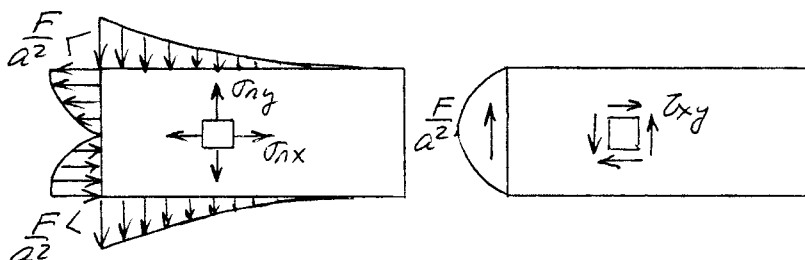
$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{F}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} \cos \frac{y}{a} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{F}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} \sin \frac{y}{a} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{F}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} \cos \frac{y}{a} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= -\frac{F}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} \cos \frac{y}{a} \end{aligned}$$

Se pide verificar que la función de Airy $\phi = F \cdot e^{-\frac{x}{a}} \cdot \cos \frac{y}{a}$ puede ser la solución del problema elástico respecto al sistema de referencia Oxy, completando en caso afirmativo los diagramas con los sentidos de las fuerzas y la acotación de los valores extremos.

$$\Delta \phi = 0 \rightarrow \Delta^2 \phi = 0$$

luego puede ser solución

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{F}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} \cos \frac{y}{a} \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{F}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} \cos \frac{y}{a} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{F}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} \sin \frac{y}{a} \end{aligned}$$



9.- Se considera un estado tensional en el que los planos octaédricos tienen tensión normal nula y tensión tangencial τ_{oct} . Se pide determinar las energías por unidad de volumen correspondientes al cambio de volumen y al cambio de forma de dicho estado.

Datos: E, μ

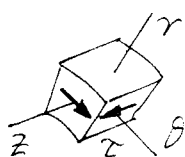
$$[\sigma_{oct}] = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma_{noct} &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0 \\ \tau_{oct}^2 &= \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \end{aligned}$$

$$[T] = \sigma_m [I] + [T_d] \quad \text{siendo} \quad \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{noct} = 0$$

luego $\left(\frac{dU}{dV}\right)_m = 0$, no hay energía de cambio de volumen

$$\begin{aligned} \left(\frac{dU}{dV}\right)_d &= \left(\frac{dU}{dV}\right) = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] = \\ &= \frac{1}{2E} [3\tau_{oct}^2 - \mu((\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2))] = \frac{3(1+\mu)}{2E} \tau_{oct}^2 \end{aligned}$$

10.- Determinar la relación entre las tensiones de rotura a tracción y a compresión k , en un material frágil, sabiendo que en el ensayo de torsión de un cilindro de este material la rotura se inicia cuando la tensión tangencial τ alcanza el 75% de la tensión de rotura a tracción.



$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & \tau \\ 0 & \tau & -\sigma \end{vmatrix} = -\sigma^3 + \tau^2 \sigma$$

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau \quad ; \quad \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_{ef} = \sigma_1 - k\sigma_3 = (1+k)\tau \leq \sigma_{rt}$$

Al producirse la rotura $(1+k)\frac{3}{4}\sigma_{rt} = \sigma_{rt}$, de donde $k = \frac{1}{3}$