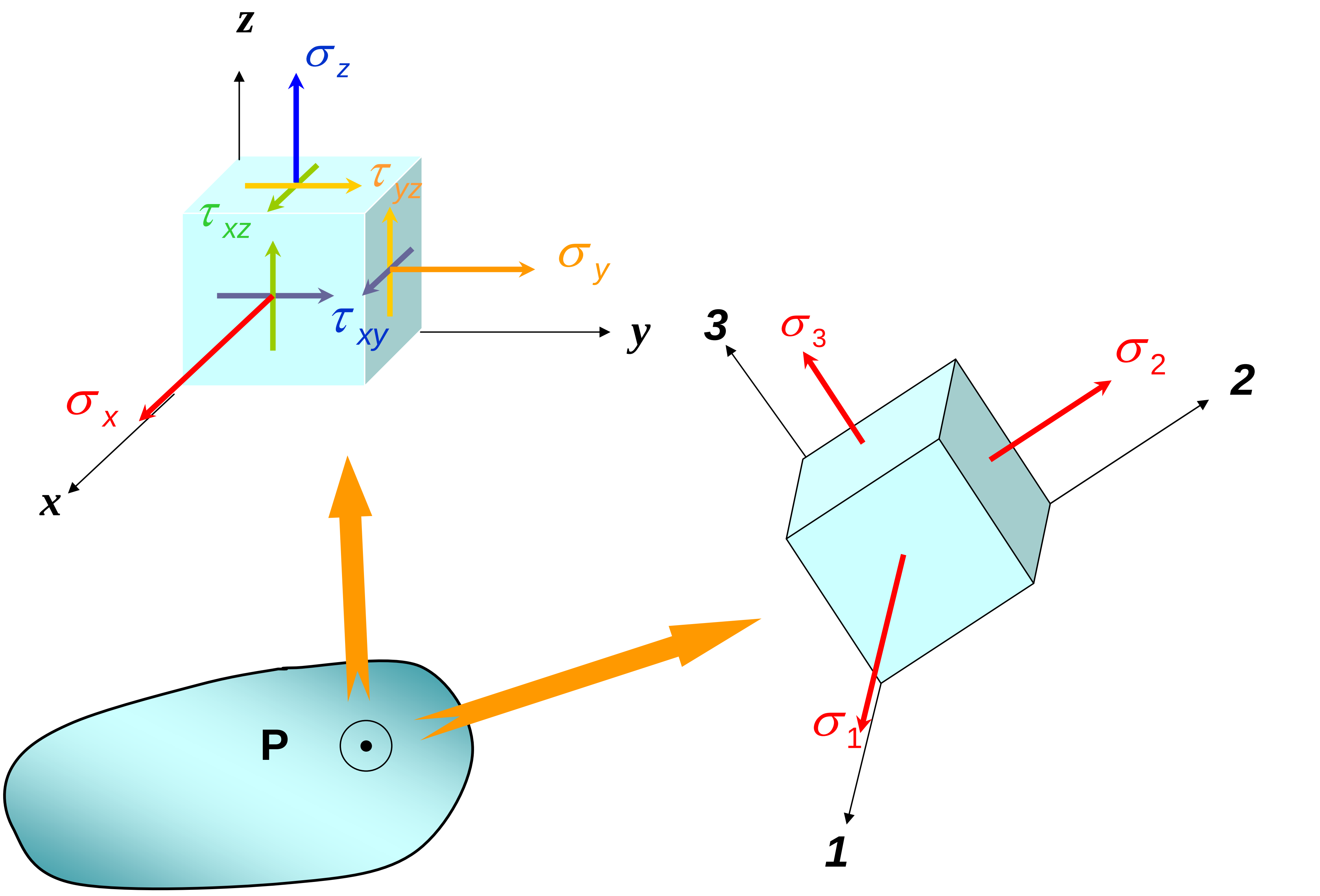
Tensiones y direcciones principales

RESISTENCIA		ÁLGEBRA
$[T]$	$\Longleftrightarrow$	MATRIZ DIAGONALIZABLE
$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	$\Longleftrightarrow$	AUTOVALORES
$\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$	$\Longleftrightarrow$	AUTOVECTORES

$$[T]_{xyz} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \qquad [T]_{123} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$



z
σ_z
τ_{yz}
τ_{xz}
σ_y
τ_{xy}
y
σ_x
x
3
σ_3
σ_2
2
σ_1
1
P

OBTENCIÓN DE TENSIONES PRINCIPALES

- **Definición de tensión principal** $\vec{\sigma} = \sigma \cdot \vec{n}$
- **Vector tensión en función de [T]** $\vec{\sigma} = [T] \cdot \vec{n}$

$$\sigma \cdot \vec{n} = [T] \cdot \vec{n}$$

Sistema de ecuaciones en α, β, γ

$$[T - \sigma \cdot I] \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

Determinante de coeficientes nulo

$$|T - \sigma \cdot I| = 0$$

$$\sigma^3 - A\sigma^2 + B\sigma - C = 0$$

Ecuación característica

INVARIANTES DE [T]

- **A: Invariante lineal**

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

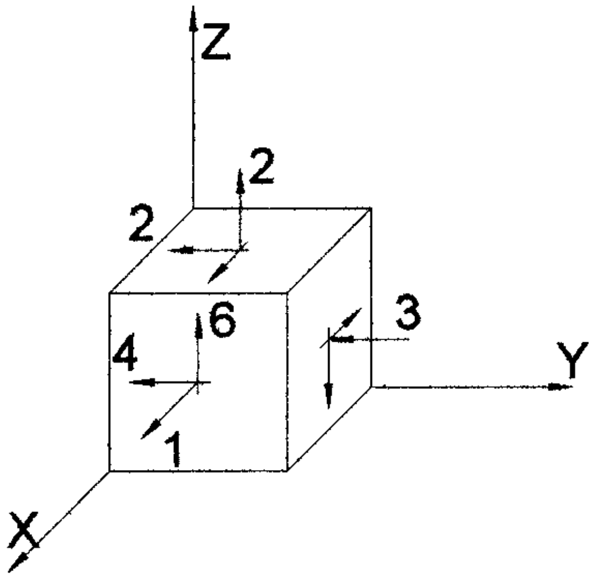
- **B: Invariante cuadrático**

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

- **C: Invariante cúbico**

Det [T]

EJEMPLO



$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -4 & -3 & -2 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \ (MPa)$$

Cálculo de tensiones principales

Ecuación característica $\left| T - \sigma \cdot I \right| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\sigma & -4 & 6 \\ -4 & 3-\sigma & -2 \\ 6 & -2 & 2-\sigma \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \sigma^3 - 63\,\sigma - 162 = 0$$

σ_1 = 9 MPa **σ_2 = -3 MPa** **σ_3 = -6 MPa**

Cálculo de la dirección principal 1

- **Sustituir σ_1 en** $[T - \sigma_1 \cdot I] \cdot \vec{n} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1-9 & -4 & 6 \\ -4 & 3-9 & -2 \\ 6 & -2 & 2-9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -8\alpha - 4\beta + 6\gamma = 0 & (1) \\ -4\alpha - 12\beta - 2\gamma = 0 & (2) \\ 6\alpha - 2\beta - 7\gamma = 0 & (3) \end{cases}$$

- **Poner α y β en función de γ**

$(1) - 2 \cdot (2) \;\rightarrow\; 20\,\beta + 10\,\gamma = 0 \;\rightarrow\; \beta = -\frac{1}{2}\gamma$

$(1) - 2 \cdot (3) \;\rightarrow\; -20\,\alpha + 20\,\gamma = 0 \;\rightarrow\; \alpha = \gamma$

- **Dar un valor a γ (distinto de cero)** $\vec{u}_1{}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- **Normalizar el vector** $|\vec{u}_1| = 3 \qquad \vec{n}_1{}^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Cálculo de las direcciones principales 2 y 3

- **Sustituir σ_2 en** $\left[T - \sigma_2 \cdot I\right] \cdot \vec{n} = \vec{0}$

- **Repetir el proceso y obtener la d. p. 2**

$$\vec{n}_2{}^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Forzar a que la d. p. 3 forme un triedro a derechas con 1 y 2**

$$\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \quad \longrightarrow \quad \vec{n}_3{}^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$