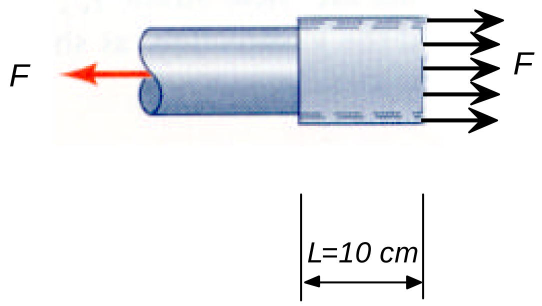
CUESTIONES

1.- Los dos tubos no están unidos entre sí por sus extremos. La transmisión de tensiones se hace de la tubería al pegamento, y desde éste a la junta exterior. De este modo, en la sección que separa ambos tubos toda la carga se transmite por la junta exterior. Esta sección de la misma está sometida a una tensión de tracción uniformemente distribuida, cuya resultante es la carga total. Eliminando mitad derecha, se tiene:



Asumiendo que en la unión pegada las tensiones cortantes se distribuyen uniformemente en toda la superficie de contacto, se tiene que:

$$\frac{F}{p \cdot f \cdot L} < t_{adm} \quad \rightarrow \quad t_{adm} > \frac{750 \cdot 10^3 (N)}{p \cdot 100(mm) \cdot 100(mm)} = 23{,}9\, MPa \qquad \text{(2 puntos)}$$

2.- El eje es un perfil delgado cerrado de espesor de pared constante, y para que no se supere la tensión admisible, debe cumplirse que $\frac{M_{Tmáx}}{2 \cdot \Omega^* \cdot e} < t_{adm}$, por lo que $M_{Tmáx} < t_{adm} \cdot 2 \cdot \Omega^* \cdot e$, siendo:

Ω^*: Área encerrada por la línea media.

$$\Omega^* = \frac{p}{4} f_m^{\,2} - 4 \cdot Área\, media\ estría \quad \rightarrow \quad \frac{p}{4} 49^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 1837{,}7\, mm^2 \qquad \text{(1,5 puntos)}$$

e: Espesor (e = 1 mm).

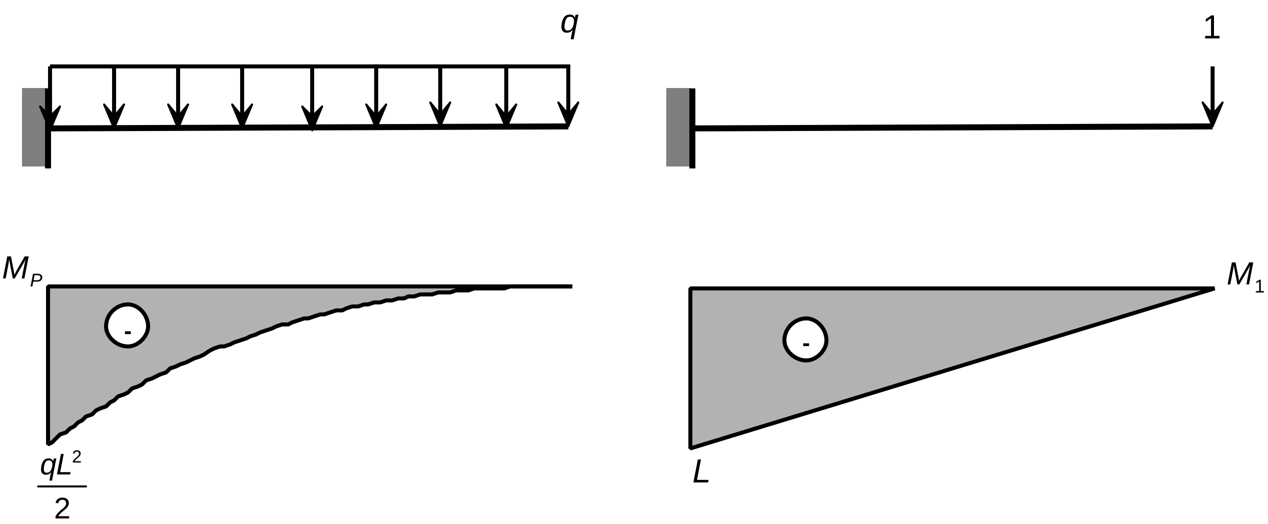
Operando:

$$M_{Tmáx} = 70\left(\frac{N}{mm^2}\right) \cdot 2 \cdot 1837{,}7\,(mm^2) \cdot 1(mm) \quad \rightarrow \quad M_{Tmáx} = 257284\, N \cdot mm \ \text{(0,5 puntos)}$$

3.- La ménsula es de sección (y momento de inercia) variable, por lo que no todos los métodos de cálculo de movimientos son aplicables.

Se va a emplear el método de la carga unidad (despreciando la pequeña inclinación de la línea media respecto a la horizontal), escogiendo el sistema de referencia y criterio de signos de la figura.

Los diagramas de momento flector para el sistema real y el virtual son:



La expresión del desplazamiento (positivo si va según la carga 1, es decir, "hacia abajo"), es:

$$d = \int_0^L \frac{M_P \cdot M_1}{EI_z} dx$$

Dado que la sección es variable, es imprescindible realizar la integración.

Las leyes de momento flector son:

$$M_P = -\frac{q}{2}(L-x)^2 \qquad \text{(1 punto)}$$
$$M_1 = -(L-x)$$

El momento de inercia es variable $I_z = \frac{1}{12} b \cdot h(x)^3$, con $b = \frac{L}{20}$ y siendo la ley de variación de la altura $h(x) = h(0) + \frac{h(L) - h(0)}{L} x$.

Operando:

$$h(x) = \frac{L}{10} + \frac{0 - \frac{L}{10}}{L}x \quad \rightarrow \quad h(x) = \frac{1}{10}(L - x)$$

Sustituyendo:

$$I_z = \frac{1}{12}\frac{L}{20}\frac{1}{10^3}(L-x)^3 \quad \rightarrow \quad I_z = \frac{L}{2{,}4\cdot 10^5}(L-x)^3 \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

Por lo tanto:

$$\frac{M_P M_1}{I_z} = \frac{\frac{q}{2}(L-x)^3}{\frac{L}{2{,}4\cdot 10^5}(L-x)^3} \quad \rightarrow \quad \frac{M_P M_1}{I_z} = 1{,}2\cdot 10^5\,\frac{q}{L}$$

Y la integral queda:

$$d = 1{,}2\cdot 10^5\,\frac{q}{E\cdot L}\int_0^L dx \quad \rightarrow \quad d = 1{,}2\cdot 10^5\,\frac{q}{E} \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

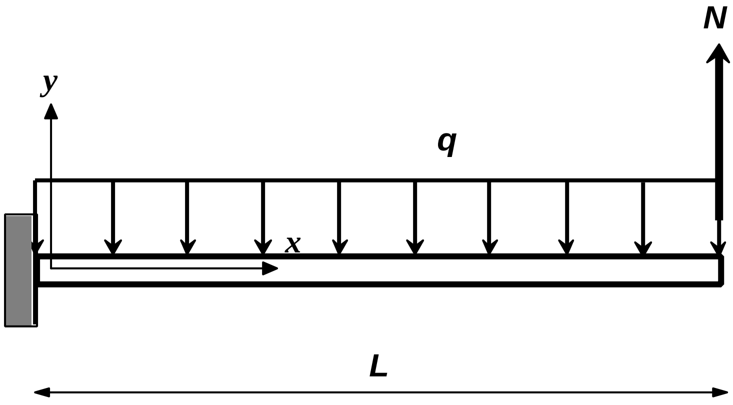
Como se puede observar, el movimiento no depende de la longitud de la ménsula.

La aplicación del segundo teorema de Mohr conduce a la misma integral. La doble integración de la ecuación diferencial de la deformada conlleva resolver integrales inmediatas. El método de la viga conjugada también resulta de fácil aplicación. La ecuación universal de la deformada no puede emplearse, dado que el momento de inercia es variable.

4.- Al haber cinco posibles reacciones y solo tres ecuaciones de equilibrio, el sistema es externamente hiperestático de segundo grado. Sin embargo, la rótula que une las dos barras introduce una libertad interna, por lo que el sistema es hiperestático de primer grado.

La barra vertical solo está sometida a tracción o compresión, dado que es biarticulada y sobre ella no hay aplicada ninguna fuerza transversal a su línea media. Por ello puede afirmarse que la reacción horizontal del apoyo fijo es nula *(que se deduce también de imponer que sea nulo el momento flector en la rótula, eliminando la parte de la estructura que queda por encima de ella).*

Empleando el método de las fuerzas, el sistema hiperestático equivalente a otro en el que no existe la barra vertical, que es sustituida por su acción sobre la rótula, imponiendo que el desplazamiento vertical de ésta sea igual al incremento de longitud de aquella (condición de compatibilidad de movimientos):

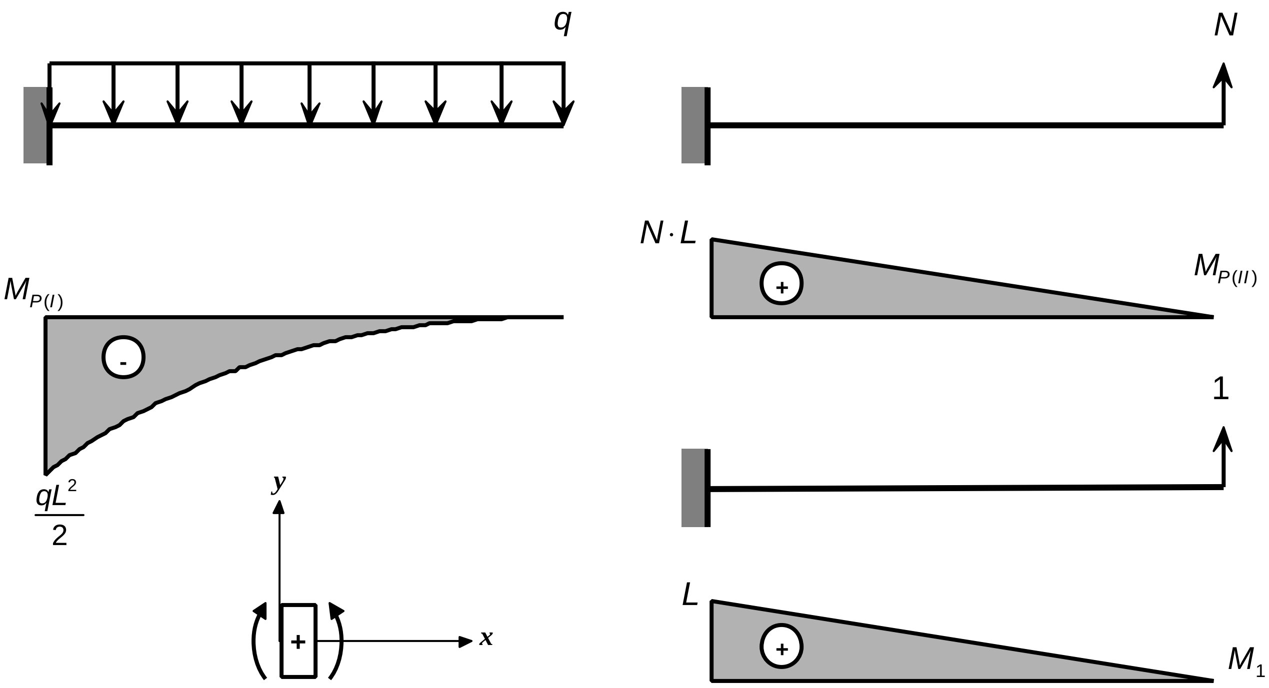


$$v(x=L)=\frac{-N\cdot\frac{2L}{3}}{E\Omega}$$

(0,5 puntos)

Para calcular el movimiento vertical de la barra así cargada se puede recurrir a cualquiera de los métodos conocidos. Se va a emplear el método de la carga unidad, descomponiendo el sistema de carga en otros dos más sencillos.

De acuerdo con el criterio de signos de la figura, los diagramas de momento flector del sistema virtual y de las dos partes en que se descompone el sistema real son:



La expresión del desplazamiento es:

$$v(x=L)=\int_0^L \frac{M_{P(I)}\cdot M_1}{EI}dx+\int_0^L \frac{M_{P(II)}\cdot M_1}{EI}dx$$

Al ser EI constante, sale fuera de las integrales, que se pueden calcular por el método de multiplicación de gráficos:

$$v(x=L)=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{qL^2}{2}\right)\cdot L\cdot\frac{3L}{4}+\frac{1}{2}NL\cdot L\cdot\frac{2}{3}L\right]\quad\rightarrow\quad v(x=L)=\frac{1}{EI}\left[-\frac{qL^4}{8}+\frac{NL^3}{3}\right]$$ (1 punto)

Sustituyendo en la condición de compatibilidad:

$$\frac{1}{EI}\left[-\frac{qL^4}{8}+\frac{NL^3}{3}\right]=-\frac{2NL}{3E\Omega}$$

Despejando:

$$N=\frac{3qL^3}{8I\left(\frac{L^2}{I}+\frac{2}{\Omega}\right)}$$ (0,5 puntos)

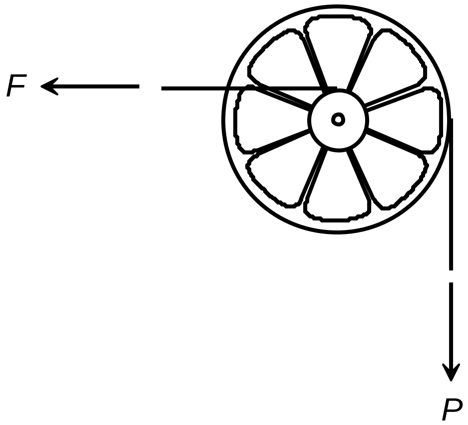
El método que se ha seguido equivale a plantear la condición de compatibilidad en la forma denominada "ecuación canónica":

$$d_{1P}+N\cdot d_{11}=-\frac{N\frac{2L}{3}}{E\Omega}$$

En ésta, d_{11} y $N\cdot d_{1P}$ son los desplazamientos verticales de la rótula debidos a la carga q y a la carga N respectivamente. Al emplear el método de la carga unidad para calcular desplazamientos, las expresiones de los coeficientes son:

$$d_{11}=\int_0^L\frac{M_1\cdot M_1}{EI}dx\qquad d_{1P}=\int_0^L\frac{M_P\cdot M_1}{EI}dx$$

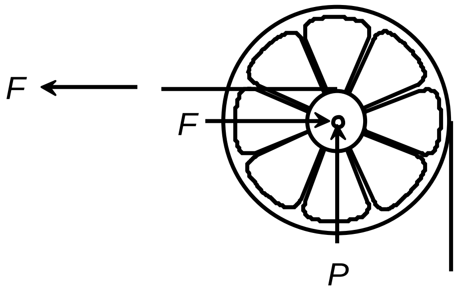
5.- Al aplicar equilibrio rotacional respecto al centro de la polea se obtiene la relación entre la carga aplicada con las pesas y la fuerza de tensión del cable:

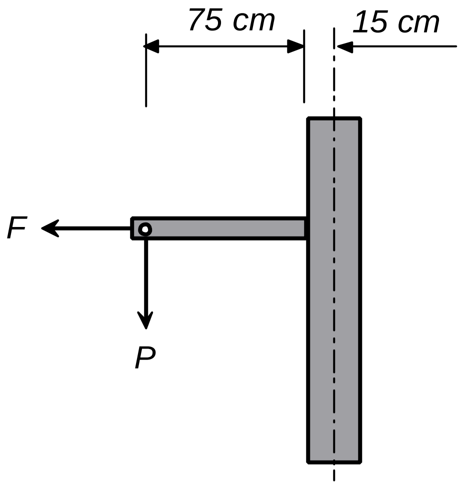


$$\sum M=0\quad\rightarrow\quad F\cdot 0{,}1\,(m)-P\cdot 0{,}5\,(m)=0\quad\rightarrow\quad P=0{,}2F$$

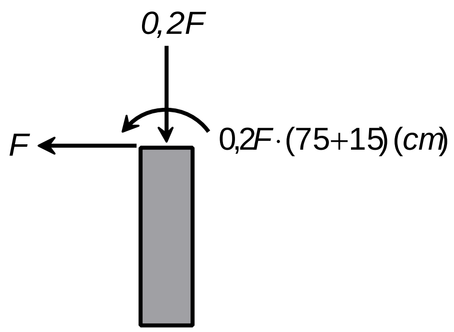
(0,5 puntos)

Por equilibrio, el pasador que hay en el centro de la polea soporta estas dos cargas. El pasador está sujeto a la barra horizontal, a la que transmite éstas mismas fuerzas, pero con sentido contrario.





La punta del poste se encuentra sometida entonces a la siguiente solicitación:

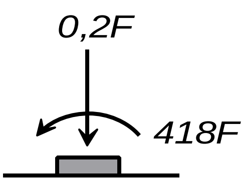


Las secciones del poste se hallan sometidas a flexión compuesta en el plano del papel y a compresión simple en el plano perpendicular. Dada la simetría de la sección y de la sustentación, ambos planos tienen la misma esbeltez. A pesar de ello el plano de pandeo no está indeterminado, sino que se producirá en el plano de flexión (el del papel), ya que ésta favorece la inestabilidad. *Si las esbelteces fuesen diferentes sería preciso analizar el pandeo en cada uno de los dos planos por separado, no siendo necesariamente el de esbeltez máxima el plano de pandeo.*

Para que el poste no pandee, debe verificarse que la suma de las tensiones de compresión máximas debidas al momento flector y al esfuerzo normal (corregida esta última con el coeficiente ω para tener en cuenta el efecto de pandeo), sea inferior a la tensión admisible:

$$w \frac{|N|}{\Omega} + \frac{|M_{Fmáx}|}{W} < s_{adm}$$

La sección más desfavorable es la del empotramiento, donde se produce el momento flector máximo:



$$M_{Fmáx} = 18F + 400F \quad \rightarrow \quad M_{Fmáx} = 418F$$

(en N·cm si F viene dada en N) (0,5 puntos)

El resto de parámetros que intervienen en la expresión anterior hay que calcularlos:

$$\Omega = \frac{p}{4}\left(f_e^{\,2} - f_i^{\,2}\right) \quad \to \quad \Omega = \frac{p}{4}\left(30^2 - 26^2\right) = 175{,}9\ cm^2$$

$$I_z = \frac{p}{64}\left(f_e^{\,4} - f_i^{\,4}\right) \quad \to \quad I_z = \frac{p}{64}\left(30^4 - 26^4\right) = 17329\ cm^4$$

$$W = \frac{I_z}{\frac{f_e}{2}} \quad \to \quad W = \frac{17329}{15} = 1155{,}3\ cm^3$$

Para el cálculo del coeficiente ω es preciso calcular la esbeltez:

$$l = \frac{L_p}{\sqrt{\frac{I}{\Omega}}} \quad \to \quad l = \frac{2 \cdot 400\ (cm)}{\sqrt{\frac{17329\ (cm^4)}{175{,}9\ (cm^2)}}} = 80{,}64$$

Entrando en la tabla del acero A-42 y tomando, por seguridad, una esbeltez de 81, se obtiene ω = 1,53. Por lo tanto:

$$1{,}53 \cdot \frac{0{,}2F(N)}{175{,}9\ (cm^2)} + \frac{418F(N \cdot cm)}{1155{,}3(cm^3)} < 140 \cdot 10^2 \left(\frac{N}{cm^2}\right)$$

Despejando:

$$F_{máx} = 385133\ N$$ (1 punto)