ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE
INGENIEROS INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE
MADRID

RESISTENCIA DE MATERIALES II **CURSO 2004-05**

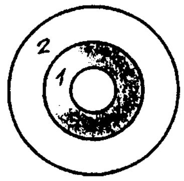
EXAMEN DE FEBRERO **18-2-2005**

CUESTIONES

1.- La figura muestra la sección transversal de un eje formado por dos cilindros unidos, de materiales diferentes: 1 y 2.

Los momentos de inercia polar y los módulos de elasticidad transversal son I_1, G_1 e I_2, G_2 respectivamente.

Se pide determinar el módulo de elasticidad transversal G que habría que considerar en un eje de las mismas dimensiones, pero de un único material, para que su rigidez a torsión fuera la misma. (1 punto)



El momento torsor M_T se repartirá entre las dos secciones

$$M_T = M_{T1} + M_{T2}$$

y en cada sección tendremos

$$\begin{cases} M_{T1} = G_1 \theta_1' I_1 \\ M_{T2} = G_2 \theta_2' I_2 \end{cases}$$

Puesto que las secciones son solidarias: $\theta_1' = \theta_2' = \theta'$, con lo que:

$$M_T = \theta'(G_1 I_1 + G_2 I_2)$$

y si no hubiera nada más que un material

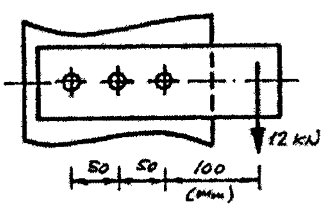
$$M_T = G\theta' I = G\theta'(I_1 + I_2)$$

de donde:

$$G = \frac{G_1 I_1 + G_2 I_2}{I_1 + I_2}$$

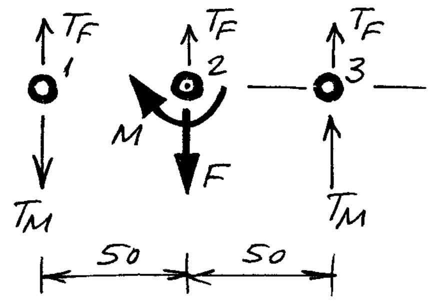
2.- Una chapa rectangular cargada transversalmente en su extremo, se sujeta mediante tres tornillos iguales, como indica la figura.

Se pide determinar el diámetro de los tornillos (nº entero de mm), si su material tiene una tensión admisible τ_{adm}=150 MPa. (2 puntos)



El centro de gravedad de la unión coincide con el tornillo central. Reduciendo a este punto la acción exterior, obtenemos:

$$\begin{cases} F = 12 \text{ kN} \\ M = 12 \cdot (100 + 50) = 1800 \text{ mm kN} \end{cases}$$



Los esfuerzos cortantes en los tornillos son:

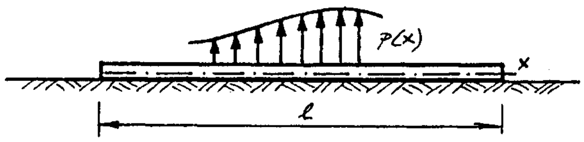
$$\begin{cases} T_F = \dfrac{F}{n} = \dfrac{12}{3} = 4 \text{ kN} \\ T_M = \dfrac{M}{\sum r^2} \cdot r = \dfrac{1800}{2 \cdot 50^2} \cdot 50 = 18 \text{ kN} \end{cases}$$

El esfuerzo máximo se produce en el tornillo 3

$$T_{max} = T_3 = T_F + T_M = 22 \text{ kN}$$

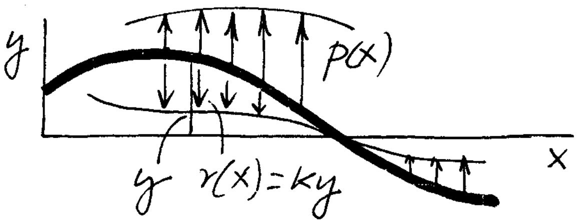
con lo que: $\dfrac{\pi d^2}{4} \geq \dfrac{T_{max}}{\tau_{adm}} = \dfrac{22000}{150} \rightarrow d \geq 13{,}7 \text{ mm} \rightarrow 14 \text{ mm}$

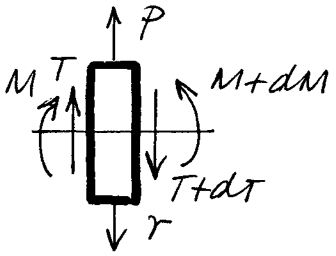
3.- Una viga está apoyada de forma continua sobre un semiespacio elástico. Se considera que la fuerza de reacción que por unidad de longitud ejerce este último, sobre cada sección, es proporcional al desplazamiento de la viga en dicha sección y en sentido opuesto.



Se pide establecer la ecuación diferencial de la elástica cuando sobre la viga actúa una distribución de fuerza por unidad de longitud *p*(*x*), así como las condiciones que debe verificar en los extremos. Son datos *E*, *I* y la constante de proporcionalidad de la sustentación *k*. (2 puntos)

Llamaremos $r(x)$ a la fuerza de reacción por ud. de longitud





Considerando $y > 0$

Las ecuaciones de equilibrio de la rebanada diferencial son:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dx} = p - r = p - ky \\ \dfrac{dM}{dx} = T \end{cases}$$

Derivando en la ecuación de la elástica, $EIy'' = M$, tendremos

$$\begin{cases} EIy''' = \dfrac{dM}{dx} = T \\ EIy^{IV} = \dfrac{dT}{dx} = p - ky \end{cases}$$

con lo que la ecuación diferencial de la elástica resulta:

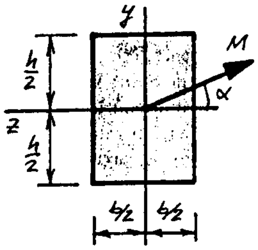
$$EIy^{IV} + ky = p(x)$$

Al ser los extremos libres, los esfuerzos se anularán:

$$\begin{cases} T(0) = T(\ell) = 0 & \rightarrow \quad y'''(0) = y'''(\ell) = 0 \\ M(0) = M(\ell) = 0 & \rightarrow \quad y''(0) = y''(\ell) = 0 \end{cases}$$

4.- La sección rectangular de la figura, de dimensiones $b{\times}h$, está sometida a un momento flector M que forma un ángulo α con la parte negativa del eje z.

Si la tensión admisible del material es σ_{adm}, se pide determinar las dimensiones de la sección para que su peso sea mínimo. (3 puntos)



Los momentos flectores son:

$$M_z = -M\cos\alpha \quad ; \quad M_y = M\,\text{sen}\,\alpha$$

y la tensión máxima (con independencia del vértice y del signo)

$$\sigma_{max} = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{6M}{bh}\left(\frac{\cos\alpha}{h} + \frac{\text{sen}\,\alpha}{b}\right)$$

Esta relación liga b, h y el área $A = bh$, por lo que podemos eliminar b, y considerar exclusivamente la relación entre A y h:

$$A = \frac{6M}{\sigma_{max}}\left(\frac{\cos\alpha}{h} + \frac{h\,\text{sen}\,\alpha}{A}\right)$$

Para conseguir el peso mínimo tendremos que agotar el material ($\sigma_{max} = \sigma_{adm}$) y minimizar el área. Derivando con respecto a h, tendremos:

$$\frac{dA}{dh} = \frac{6M}{\sigma_{adm}}\left(-\frac{\cos\alpha}{h^2} + \frac{\text{sen}\,\alpha}{A} - \frac{h\,\text{sen}\,\alpha}{A^2}\frac{dA}{dh}\right)$$

y anulando $\frac{dA}{dh}$ tendremos la condición de mínima área

$$\frac{\cos\alpha}{h^2} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{A} \quad \rightarrow \quad \frac{b}{h} = \text{tg}\,\alpha$$

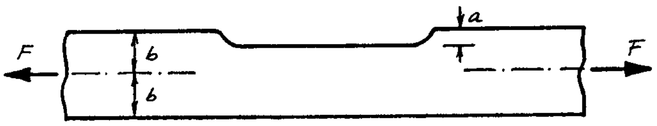
Sustituyendo en la expresión de σ_{max} ($= \sigma_{adm}$), obtenemos finalmente

$$\sigma_{adm} = \frac{6M}{h^2 tg\alpha}\left(\frac{\cos\alpha}{h} + \frac{sen\,\alpha}{h\,tg\alpha}\right)$$

de donde:

$$h^3 = \frac{6M}{\sigma_{adm}\cdot tg\alpha}\left(\cos\alpha + \cos\alpha\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{l} h = \sqrt[3]{\dfrac{12M\cos^2\alpha}{\sigma_{adm}\cdot sen\alpha}} \\ b = tg\alpha\cdot\sqrt[3]{\dfrac{12M\cos^2\alpha}{\sigma_{adm}\cdot sen\alpha}} \end{array}\right.$$

5.- Una pletina de sección $2b$ x e está sometida a tracción. A lo largo de una zona la sección está debilitada por una entalla lateral de profundidad a, como indica la figura.

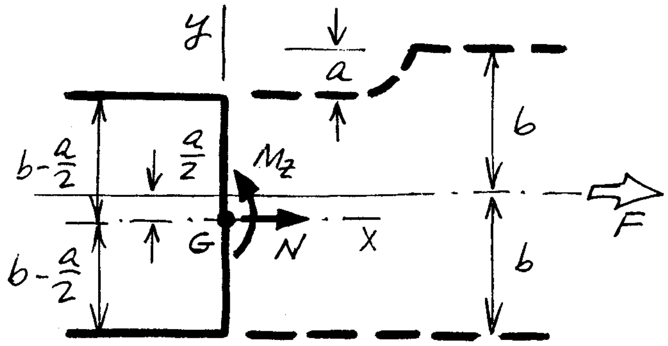


Se pide determinar la relación a/b para que se produzca en la sección central de la zona entallada una tensión máxima doble de la tensión nominal en la pletina. (2 puntos)

En la pletina tendremos tracción pura, con un esfuerzo $N_0 = F$, y tensión nominal:

$$\sigma_0 = \frac{N_0}{A} = \frac{F}{2be}$$

En la zona entallada tendremos flexión compuesta:



$$\left(\begin{array}{l} N = F \\ M_z = -F\dfrac{a}{2} \end{array}\right.$$

y la tensión máxima será

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{|M_z|}{W_z} = $$

$$= \frac{F}{e(2b-a)} + \frac{F\frac{a}{2}}{\frac{1}{6}e(2b-a)^2}$$

de donde:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{e\cdot 2b}\left[\frac{2b}{2b-a} + \frac{3a\cdot 2b}{(2b-a)^2}\right] = \sigma_0\left[\frac{2}{2-\alpha} + \frac{6\alpha}{(2-\alpha)^2}\right] = \sigma_0\,\frac{4(1+\alpha)}{(2-\alpha)^2}$$

siendo σ_0 la tensión nominal y $\alpha = \frac{a}{b}$

Para que $\sigma_{max} = 2\sigma_0$, tendremos:

$$2(2-\alpha)^2 = 4(1+\alpha) \rightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha = 3-\sqrt{7} =$$

$$= 0{,}354$$