ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE
INGENIEROS INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE
MADRID

RESISTENCIA DE MATERIALES II **CURSO 2004-05**
EXAMEN DE JUNIO **1-7-2005**

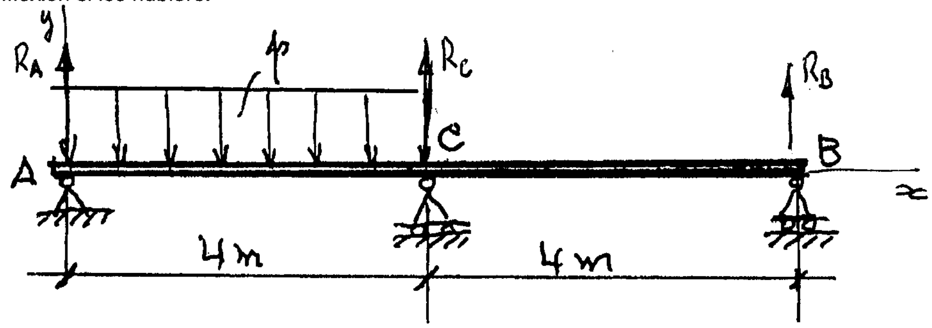
PROBLEMA

Se considera la viga AB indicada en la figura, con un apoyo fijo en el extremo A y apoyos móviles en el otro extremo B y en la sección media C. La viga está sometida a una carga uniforme $p = 24$ kN/m en el tramo AC. Conociendo el módulo de elasticidad de la viga $E = 200$ GPa, el momento de inercia de la sección $I_z = 80.\ 10^6$ mm^4 y que debido a un defecto de construcción el soporte de rodillo en C se asienta 12 mm, se pide:

1°. Calcular las reacciones en los apoyos A, B y C.

2°. Hallar el giro experimentado por la sección C, indicando el sentido.

3°. Dibujar a estima la elástica de la viga, indicando la situación de los puntos de inflexión si los hubiere.



1°.- Se trata de una viga hiperestática de primer grado. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{cases} R_A + R_B + R_C = 4p = 96 \text{ KN} & (1) \\ 8R_A - 96\times 6 + 4R_C = 0 \Rightarrow 2R_A + R_C = 144 \text{ KN} & (2) \end{cases}$$

Vemos, en efecto, que existe una incognita hiperestática, ya que hemos obtenido un sistema de dos ecuaciones con tres incognitas.

Resolveremos la indeterminación aplicando la ecuación universal de la elástica:

$$EI_z y = EI_z y_0 + EI_z \theta_A x + R_A \frac{x^3}{6} - p\frac{x^4}{24} + p\frac{\langle x-4\rangle^4}{24} + R_C\frac{\langle x-4\rangle^3}{6}$$

siendo $EI_z = 200\times 10^9 \times 80\times 10^{-6}$ N.m^2 $= 16\times 10^6$ N.m^2

Condiciones de contorno: $y(0) = 0 \Rightarrow EI_z y_0 = 0$

$y(4) = -0{,}012$ m : $-0{,}012\, EI_z = 4\, EI_z \theta_A + R_A \frac{64}{6} - 24\times 10^3 \frac{256}{24}$ (3)

$y(8) = 0$: $0 = 8EI_z\theta_A + R_A\frac{512}{6} - 24\times 10^3\left(\frac{4.096}{24} - \frac{256}{24}\right) + R_C\frac{64}{6}$ (4)

Simplificando, se tiene:

$$64000 = 4\,EI_z\,\theta_A + \frac{64}{6} R_A \qquad (3)$$

$$2.304.000 = 8\,EI_z\,\theta_A + \frac{192}{3} R_A \qquad (4)$$

De este sistema de ecuaciones se obtienen las soluciones:

$R_A = 51$ KN ; $EI_z\theta_A = -120.000$

De las ecuaciones (2) y (1) se obtienen, respectivamente:

$R_C = 144 - 2 \times 51 = 42$ KN ; $R_B = 96 - 51 - 42 = 3$ KN

es decir, las reacciones pedidas son:

$R_A = 51$ KN ; $R_B = 3$ KN ; $R_C = 42$ KN

2º.- Las leyes de giro se obtienen derivando la ecuación universal

$$EI_z\,\theta = -120.000 + 51.000\,\frac{x^2}{2} - 24.000\,\frac{x^3}{6} + 24.000\,\frac{\langle x-4\rangle^3}{6} + 42000\,\frac{\langle x-4\rangle^3}{6}$$

El giro de la sección se obtiene particularizando esta ecuación para x=4 m

$$EI_z\,\theta_C = -120.000 + \frac{51000}{2} \times 16 - \frac{24.000}{6} \times 64 = 32.000$$

$$\theta_C = \frac{32.000}{16 \times 10^6} = 2 \times 10^{-3} \text{ radianes} \qquad \text{sentido antihorario}$$

3º.- Para dibujar la elástica observemos el diagrama de momentos flectores.

$M_z = 51.000\,x - 24.000\,\frac{x^2}{2}$ $\qquad 0 \le x \le 4$ m

$M_z = 3000\,(8-x)$ $\qquad 4\text{ m} \le x \le 8$ m

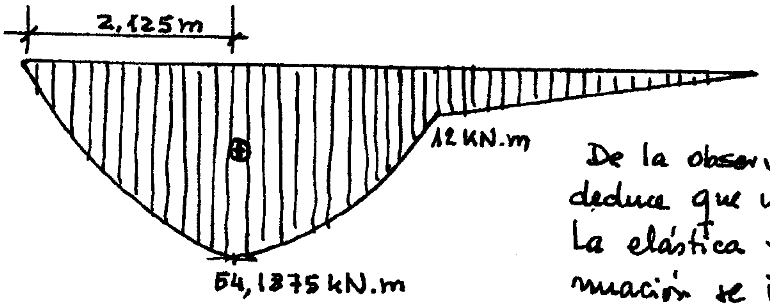
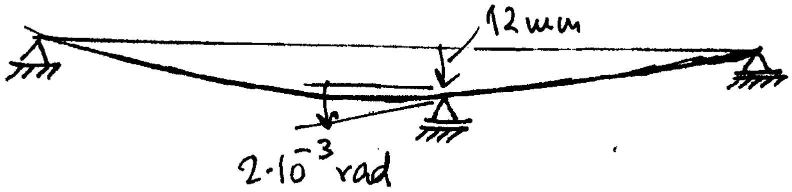


DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES

De la observación del diagrama se deduce que no existen puntos de inflexión. La elástica tendrá la forma que a continuación se indica:

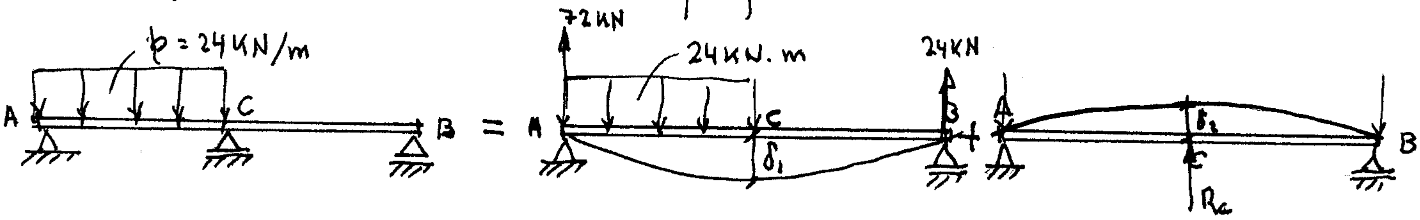


ELASTICA

OTROS MÉTODOS

Para la resolución de la viga hiperestática propuesta se pueden utilizar otros métodos como son, por ejemplo, el método de superposición y el método de las fuerzas. En ambos métodos tomaremos R_C como incognita hiperestática.

b) Aplicando el método de superposición



Calculemos el desplazamiento vertical de la sección C de la primera viga aplicando la ecuación universal de la elástica.

$$EI_z\,y = EI_z\,y_0 + EI_z\,\theta_0 x + 72\frac{x^3}{6} - 24\frac{x^4}{24} + 24\frac{\langle x-4\rangle^4}{24}$$

$y(0)=0 \;\Rightarrow\; y_0 = 0$

$y(8)=0 \;\Rightarrow\; 0 = 8EI_z\theta_0 + 12\times 8^3 - 8^4 + 4^4 \Rightarrow EI_z\theta_0 = -288$

$$EI_z\,\delta_1 = -288\times 4 + \frac{72}{6}4^3 - 4^4 = -640 \Rightarrow \delta_1 = -\frac{640}{16\times 10^3} = -0{,}04\,m$$

En la segunda viga, el desplazamiento vertical de la sección C es:

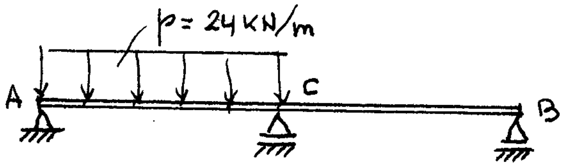
$$\delta_2 = \frac{R_C\times 8^3}{48\,EI_z}$$

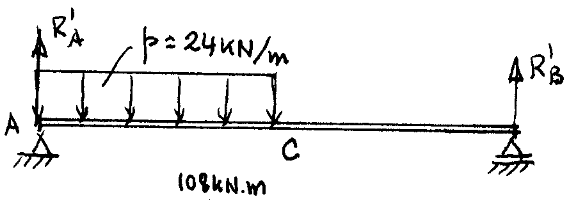
Aplicando el principio de superposición:

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = 0{,}04 - \frac{R_C\times 8^3}{48\times 16\times 10^3} = 0{,}012\ m$$

$$\boxed{R_C} = \frac{0{,}028\times 48\times 16\times 10^3}{8^3}\ KN = \boxed{42\ KN}$$

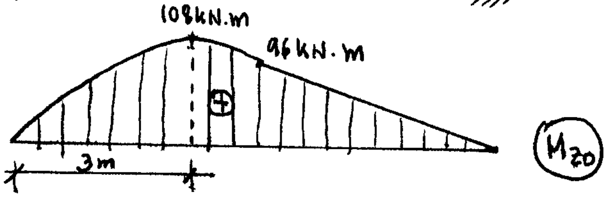
c) Aplicando el método de las fuerzas.





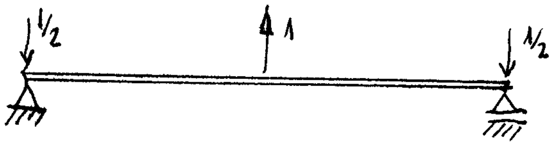
$$R'_A + R'_B = 24 \times 4 = 96 \text{ KN}$$

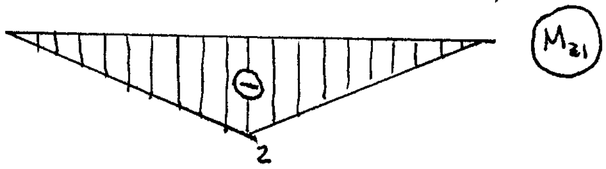
$$8R'_A - 24 \times 4 \times 6 = 0 \Rightarrow R'_A = 72 \text{ KN}; \; R'_B = 24 \text{ KN}$$



$$M_{z0} = 72x - 24\frac{x^2}{2} \qquad 0 \leq x \leq 4\text{m}$$

$$M_{z0} = 24\,(8-x) \qquad 4\text{m} \leq x \leq 8\text{m}$$





$$M_{z1} = -0{,}5x \qquad 0 \leq x \leq 4\text{ m}$$

$$M_{z1} = -0{,}5\,(8-x) \qquad 4\text{m} \leq x \leq 8\text{ m}$$

Ecuación canónica : $\delta_{11} R_c + \Delta_{1P} = -0{,}012$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI_z}\,\frac{1}{2}\,4 \times 2 \times \frac{2}{3}\,2 = \frac{32}{3EI_z}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI_z}\int_0^8 M_{z0} M_{z1}\,dx = \frac{1}{EI_z}\left[\int_0^4 -\frac{1}{2}\,x\,(72x - 12x^2)\,dx + \frac{1}{2}\,96 \times 4 \times \left(-\frac{2}{3}\,2\right)\right] = -\frac{640}{EI_z}$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes de influencia en la ecuación canónica :

$$\frac{32}{3} R_c - 640 = -0{,}012 \times 16 \times 10^3 = -192 \text{ KN}$$

se obtiene $\boxed{R_c} = \dfrac{448 \times 3}{32} = \boxed{42 \text{ KN}}$

Simplificando, se tiene:

$$64000 = 4\,EI_z\,\theta_A + \frac{64}{6}R_A \qquad (3)$$

$$2.304.000 = 8\,EI_z\,\theta_A + \frac{192}{3}R_A \qquad (4)$$

De este sistema de ecuaciones se obtienen las soluciones:

$R_A = 51$ kN ; $EI_z\theta_A = -120.000$

De las ecuaciones (2) y (1) se obtienen, respectivamente:

$R_C = 144 - 2\times 51 = 42$ kN ; $R_B = 96 - 51 - 42 = 3$ kN

es decir, las reacciones pedidas son:

$R_A = 51$ kN ; $R_B = 3$ kN ; $R_C = 42$ kN

2º.- Las leyes de giro se obtienen derivando la ecuación universal

$$EI_z\theta = -120.000 + 51.000\frac{x^2}{2} - 24.000\frac{x^3}{6} + 24.000\frac{\langle x-4\rangle^3}{6} + 42000\frac{\langle x-4\rangle^3}{6}$$

El giro de la sección se obtiene particularizando esta ecuación para $x=4$ m

$$EI_z\theta_C = -120.000 + \frac{51000}{2}\times 16 - \frac{24.000}{6}\times 64 = 32.000$$

$$\theta_C = \frac{32.000}{16\times 10^6} = 2\times 10^{-3} \text{ radianes} \qquad \text{sentido antihorario}$$

3º.- Para dibujar la elástica observemos el diagrama de momentos flectores.

$M_z = 51.000\,x - 24.000\,\frac{x^2}{2} \qquad 0 \le x \le 4$ m

$M_z = 3000\,(8-x) \qquad 4\text{ m} \le x \le 8$ m

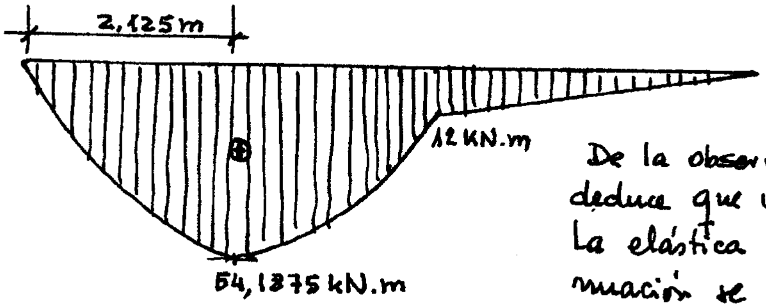
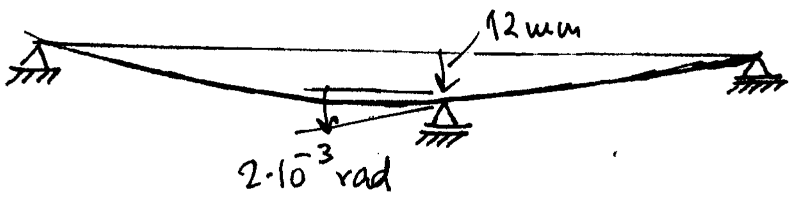


DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES

De la observación del diagrama se deduce que no existen puntos de inflexión. La elástica tendrá la forma que a continuación se indica:



ELÁSTICA