ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE
INGENIEROS INDUSTRIALES

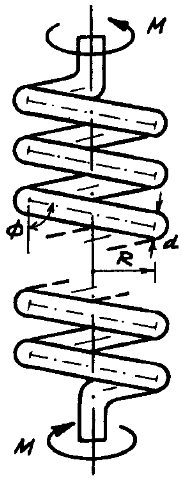
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE
MADRID

RESISTENCIA DE MATERIALES II **CURSO 2004-2005**

EXAMEN DE SEPTIEMBRE **16-09-2005**

PROBLEMA

Un resorte helicoidal está formado por *n* espiras útiles de radio medio *R*, diámetro de varilla *d*, y ángulo helicoidal ϕ. Al someterlo a torsión por la acción de dos pares *M* en sus extremos, tal como indica la figura, se produce un giro axial relativo θ entre ellos. Se pide:



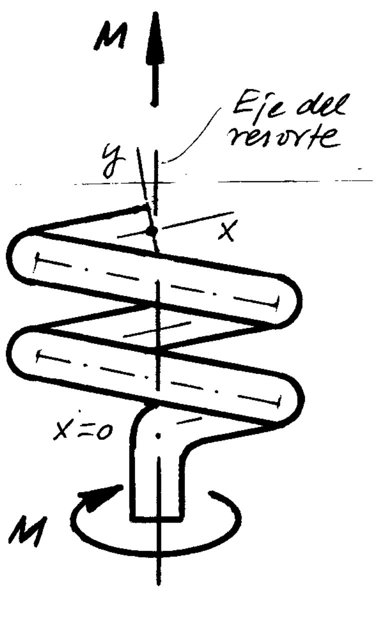
1) Valor del par máximo que se puede aplicar en los extremos, si el material tiene una tensión normal admisible σ_{adm} y el criterio de plastificación es el de Tresca.

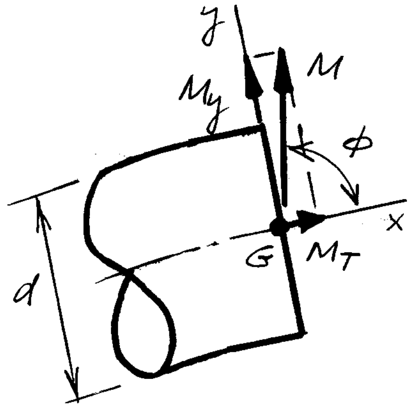
2) Rigidez del resorte $k=M/\theta$, si el material tiene módulos de elasticidad *E* y *G*.

3) Aplicación al siguiente caso numérico:
n=10; R=20 mm; d=4 mm; ϕ=80°
σ_{adm}=450 MPa; E=200 GPa; G=77 GPa.

1) La directriz de la varilla es la hélice de radio R y ángulo ϕ. Fijaremos su origen en el extremo inferior ($x=0$), y como eje z de las secciones tomaremos el perpendicular al eje del resorte.

Cortando por una sección transversal y eliminando la parte superior tendremos que en dicha parte sólo actúa el momento M, según el eje del resorte. Así pues, los esfuerzos en cualquier sección serán las proyecciones de M sobre los ejes: M_T y M_y.





$$\begin{cases} M_T = M\cos\phi \\ M_y = M\,\mathrm{sen}\,\phi \end{cases}$$

2

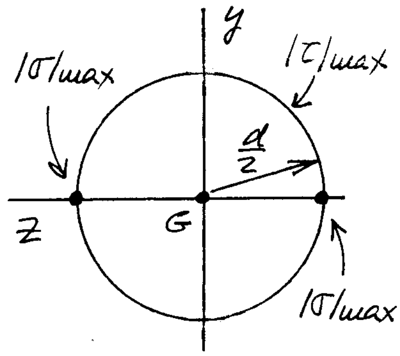
Debido a estos momentos tendremos las siguientes tensiones máximas en la sección circular de diámetro d.

$$|\sigma|_{max} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{M \operatorname{sen}\phi}{W_y} \qquad \text{para } z = \pm\frac{d}{2}$$

$$|\tau|_{max} = \frac{M_T}{W_T} = \frac{M\cos\phi}{2W_y} \qquad \text{para } r = \frac{d}{2}$$

siendo $I_y = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\pi}{64}d^4$; $W_y = \frac{2}{d}I_y = \frac{\pi}{32}d^3$

Al coincidir en dos puntos de la sección los valores máximos, tendremos que la tensión equivalente máxima, según el criterio de Tresca, es:



$$(\sigma_{ef})_{max} = \sqrt{|\sigma|^2_{max} + 4|\tau|^2_{max}} =$$

$$= \sqrt{\frac{M^2\operatorname{sen}^2\phi}{W_y^2} + 4\frac{M^2\cos^2\phi}{4W_y^2}} = \frac{M}{W_y} \qquad \text{(independiente de } \phi\text{!)}$$

y la condición de diseño resultará:

$$(\sigma_{ef})_{max} \leq \sigma_{adm} \quad \rightarrow \quad \frac{M}{W_y} \leq \sigma_{adm} \qquad M_{max} = \frac{\pi}{32}d^3\sigma_{adm}$$

4

2) Para determinar el giro relativo ϑ aplicaremos el Teorema de Castigliano.

El potencial elástico acumulado en el resorte será:

$$\mathcal{T} = \int_0^l \frac{M_y^2}{2EI_y}dx + \int_0^l \frac{M_T^2}{2GI_0}dx =$$

$$= \int_0^l \frac{M^2\operatorname{sen}^2\phi}{2EI_y}dx + \int_0^l \frac{M^2\cos^2\phi}{2GI_0}dx = \frac{M^2}{2I_y}\left(\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{E} + \frac{\cos^2\phi}{2G}\right) n\frac{2\pi R}{\operatorname{sen}\phi}$$

ya que la longitud de la directriz es $l = n\frac{2\pi R}{\operatorname{sen}\phi}$

Derivando respecto a M tendremos θ:

$$\theta = \frac{\partial \mathcal{E}^o}{\partial M} = \frac{M}{I_y}\left(\frac{sen^2\phi}{E} + \frac{cos^2\phi}{2G}\right) n \cdot \frac{2\pi R}{sen\phi}$$

con lo que:

$$K = \frac{M}{\theta} = \frac{I_y\, sen\phi}{\left(\frac{sen^2\phi}{E} + \frac{cos^2\phi}{2G}\right) n 2\pi R} = \frac{d^4 \cdot sen\phi}{128\left(\frac{sen^2\phi}{E} + \frac{cos^2\phi}{2G}\right) n R}$$ 3

3) Sustituyendo los valores numéricos en las expresiones obtenidas:

$$M_{max} = \frac{\pi}{32} \cdot 4^3 \cdot 450 = 2827,5 \ N\text{-}mm$$

$$K = \frac{4^4 \cdot 10^3 \cdot sen 80^\circ}{128\left(\frac{sen^2 80^\circ}{200} + \frac{cos^2 80^\circ}{2 \cdot 77}\right) \cdot 10 \cdot 20} = 1952 \ \frac{N\text{-}mm}{rad}$$

1

$$\left(\theta_{max} = \frac{M_{max}}{K} = \frac{2827,5}{1952} = 1,45 \ rad = 83^\circ\right)$$