ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE
INGENIEROS INDUSTRIALES

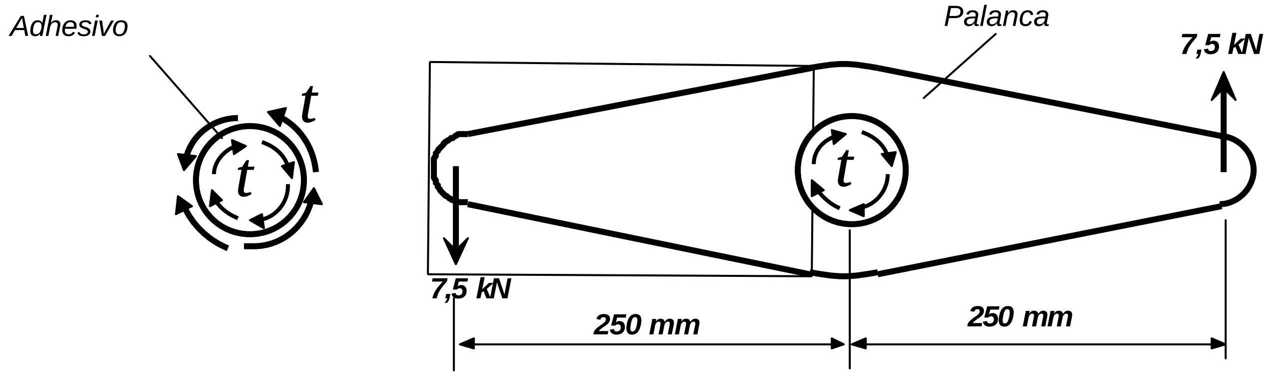
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE
MADRID

RESISTENCIA DE MATERIALES II **CURSO 2005-06**

EXAMEN DE FEBRERO **10-2-2006**

CUESTIONES

1.- El adhesivo debe absorber el par creado por las fuerzas aplicadas. Sobre el adhesivo solo existirán tensiones de cortadura uniformes, de valor τ.



Imponiendo equilibrio de momentos en la palanca, se obtiene el valor pedido:

$$t\left(\frac{N}{mm^2}\right)\cdot p\ \cdot 60(mm)\cdot 100(mm)\cdot 30(mm)-2\cdot 7500(N)\cdot 250(mm)=0$$

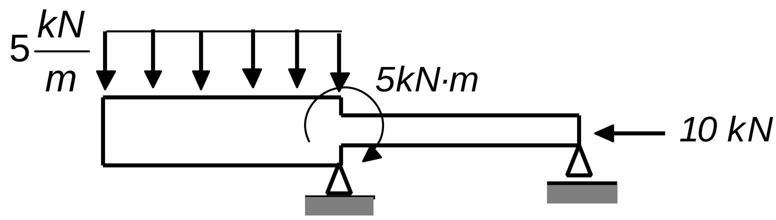
$t_{adm} \geq 6{,}6\ MPa$ (2 puntos)

2.- A la vista del salto brusco del momento flector, en el apoyo central debe existir un par puntual, en sentido horario y de 5 kN·m.

Para que el esfuerzo normal no sea nulo en el extremo derecho, en este punto debe existir una fuerza axial de compresión, de valor 10 kN.

Para que el momento flector sea parabólico, debe existir una carga uniformemente distribuida en el tramo izquierdo. Por ser nula la pendiente en el extremo libre, no puede haber carga puntual en éste. Para que las compresiones de flexión se den en las fibras inferiores de la barra, como se indica en el diagrama, la carga debe ser descendente. Si $q\left(\frac{kN}{m}\right)$es el valor modular de ésta, el momento flector que crea en el apoyo izquierdo se obtiene sustituyendo la carga uniforme por una puntual estáticamente equivalente: De valor q·2(m), y situada a 1 m del apoyo.

$$q\left(\frac{kN}{m}\right)\cdot 2(m)\cdot 1(m) = 10kN\cdot m \quad \rightarrow \quad q = 5\left(\frac{kN}{m}\right) \qquad \text{(0,5 puntos)}$$



En el tramo izquierdo solo existe momento flector:

$$\frac{|M_F|_{máx}}{W} < s_{adm} \quad \rightarrow \quad W > \frac{10\cdot 10^6 (N\cdot mm)}{260\left(\frac{N}{mm^2}\right)} = 38461 mm^3 \equiv 38{,}5 cm^3 \quad \rightarrow \quad IPE120$$

(0,5 puntos)

En el tramo derecho existe momento flector y esfuerzo normal. Se dimensiona solo a flexión, y se comprueba posteriormente si sirve para flexión compuesta:

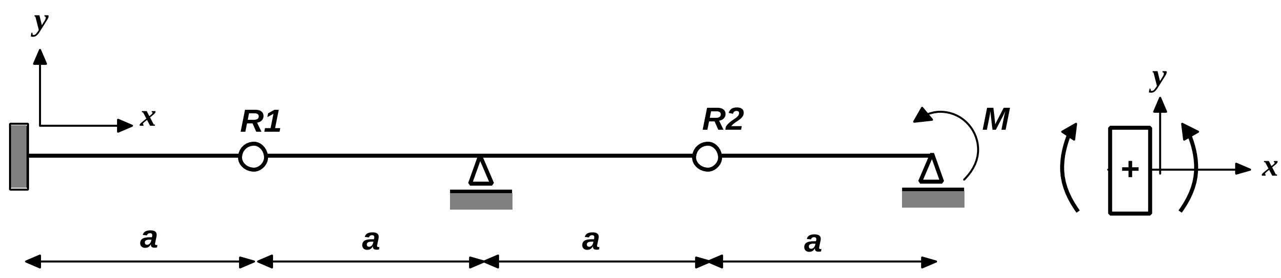
$$\frac{|M_F|_{máx}}{W} < s_{adm} \quad \rightarrow \quad W > \frac{5\cdot 10^6 (N\cdot mm)}{260\left(\frac{N}{mm^2}\right)} = 19230\ mm^3 \equiv 19{,}3\ cm^3 \quad \rightarrow \quad IPE80\begin{cases} W = 20\ cm^3 \\ \Omega = 7{,}64\ cm^2 \end{cases}$$

$$\frac{|M_F|_{máx}}{W} + \frac{|N|_{máx}}{\Omega} < s_{adm} \quad \rightarrow \quad \frac{5\cdot 10^6 (N\cdot mm)}{20000\,(mm^3)} + \frac{10\cdot 10^3 (N)}{764\,(mm^2)} = 263\ MPa > 260\ MPa \quad No\ vale$$

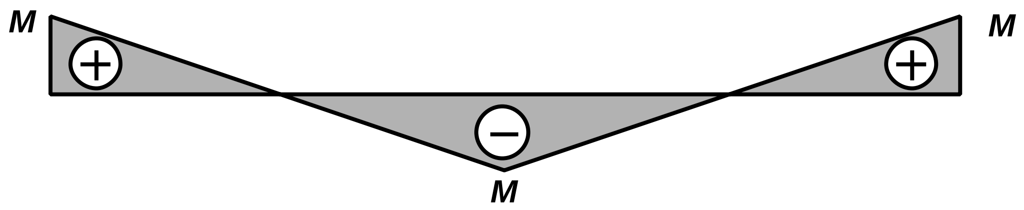
Puesto que la tensión está muy cerca de la admisible, bastará con escoger el perfil inmediatamente superior: IPE 100. (1 punto)

3.- Se elige el método de la carga unidad.

Para trazar los diagramas de momentos flectores, se escoge el criterio de signos y la referencia local de la figura.

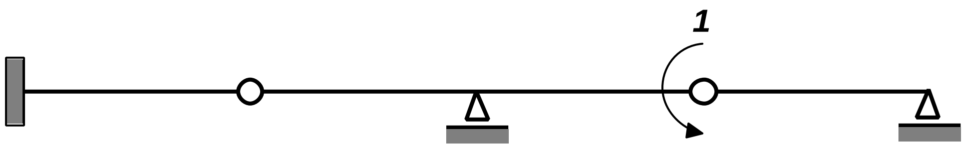


El diagrama de la viga real es lineal en toda la viga (no aparecen cargas distribuidas), debe valer M en el extremo derecho, ser cero en las rótulas y experimentar un cambio de pendiente en el apoyo central. El diagrama, por tanto, es:



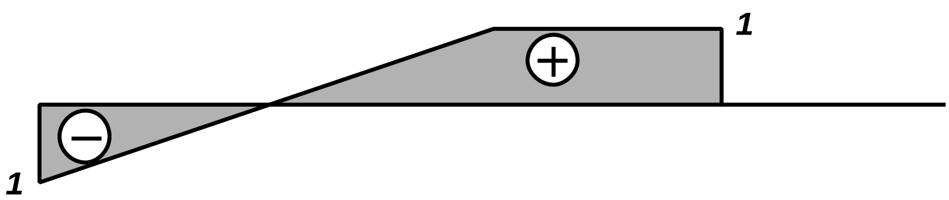
(0,5 puntos)

El sistema virtual se construye con un par puntual unitario en la sección izquierda de la rótula R2.



(0,5 puntos)

En la sección derecha no existe momento aplicado. Por ello, para que el momento flector sea nulo en la sección derecha, la reacción en el apoyo derecho debe ser nula. Por un razonamiento semejante al anterior, el diagrama es:



(0,5 puntos)

El giro se calcula como $j_1 = \int_0^{8m} \frac{M_F M_1}{EI} dx$.

Descomponiendo la integral en tramos, y teniendo en cuenta que EI es constante:

$$j_1 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{2m} M_F M_1 dx + \int_{2m}^{4m} M_F M_1 dx + \int_{4m}^{6m} M_F M_1 dx\right]$$

Calculando las integrales por el método de multiplicación de gráficos:

$$j_1 = \frac{1}{EI}\left[2 \cdot \frac{1}{3}(-M)\cdot a \cdot 1 + \frac{1}{2}(-M)\cdot a \cdot 1\right] = -\frac{7}{6}\frac{Ma}{EI}$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{2p}{360} = -\frac{7}{6}\frac{M(N\cdot m)\cdot 2(m)}{10^6(N\cdot m^2)} \quad \rightarrow \quad M = -7480\ N\cdot m \qquad \text{(1 punto)}$$

Por ser negativo el resultado, entonces para producir un giro en el sentido del par unidad (antihorario) sería preciso aplicar un momento en sentido contrario al de la figura del enunciado.

Nota: La aplicación de los teoremas de Mohr o de la ecuación universal de la deformada es compleja debido a la presencia de rótulas. El método de la viga conjugada no aporta ventajas operatorias.

4.- Por ser de compresión el esfuerzo aplicado, solo existirán tracciones en C si el punto de aplicación del esfuerzo (centro de presiones) es exterior al núcleo central de la sección. El núcleo central tiene el aspecto de un rombo, y para calcular sus vértices basta con imponer que las rectas $\boldsymbol{y}$ = 40 cm y $\boldsymbol{z}$ = 10 sean el eje neutro.

La ecuación del eje neutro en función del centro de presiones es:

$$1+\frac{y_c \cdot \Omega}{I_z} y+\frac{z_c \cdot \Omega}{I_y} z=0$$

Los momentos de inercia y la sección son:

$$I_z=\frac{1}{12} 20(cm) \cdot 80^3\left(cm^3\right)-2 \frac{1}{12} 5(cm) \cdot 60^3\left(cm^3\right)=673333\ cm^4$$

$$I_y=2 \frac{1}{12} 10(cm) \cdot 20^3\left(cm^3\right)+\frac{1}{12} 60(cm) \cdot 10^3\left(cm^3\right)=18333\ cm^4 \qquad \text{(1 punto)}$$

$$\Omega=2 \cdot 10(cm) \cdot 20(cm)+10(cm) \cdot 60(cm)=1000\ cm^2$$

Recta $y=40\ cm \quad \rightarrow \quad 1-\frac{1}{40} y=0$.

identificando la ecuación de la recta con la del eje neutro:

$$-\frac{1}{40}=\frac{y_c \cdot 1000}{673333} \quad \rightarrow \quad y_c=-16{,}8\ cm$$

Como el punto A está dentro del núcleo, entonces no aparecen tracciones en C.

(1 punto)

Recta $z=10\ cm \quad \rightarrow \quad 1-\frac{1}{10} z=0$.

Identificando: $-\frac{1}{10}=\frac{z_c \cdot 1000}{18333} \quad \rightarrow \quad y_c=-1{,}83\ cm$

Como el punto B está fuera del núcleo, entonces aparecen tracciones en C.

(0,5 puntos)

Otros planteamientos:

- Obtener las tensiones en función de la carga aplicada P. No se obtiene el valor, pero sí el signo.

- Hallar el eje neutro para cada centro de presiones, probando que en un caso no corta a la sección, y en el otro sí.

5.- El mejor comportamiento a pandeo se consigue cuando se minimiza la esbeltez máxima.

Inicialmente, antes de colocar la sustentación en la punta del pilar, las esbelteces son:

$$l_{xy}=\frac{2L}{i_z} \qquad l_{xz}=\frac{2L}{i_y}$$

La esbeltez mayor se da en el plano ***xz***, ya que $i_y < i_z$. Para minimizar ésta, se coloca en el plano ***xz*** la sustentación más rígida:

Plano biempotrado: ***xz*** (0,5 puntos)

El plano de pandeo lo determina la esbeltez mayor:

$$l_{xy} = \frac{2L}{i_z} \quad \rightarrow \quad l_{xy} = \frac{2L(cm)}{\sqrt{\frac{690(cm^4)}{26{,}1(cm^2)}}} = 0{,}389L$$

$$l_{xz} = \frac{0{,}5L}{i_y} \rightarrow \quad l_{xz} = \frac{0{,}5L(cm)}{\sqrt{\frac{410(cm^4)}{26{,}1(cm^2)}}} = 0{,}126L$$

Por tanto, el plano de pandeo es ***xy***. (0,5 puntos)

Para el cálculo de la altura máxima es preciso calcular la esbeltez máxima, por el método de los coeficientes ω:

$$\frac{N}{\Omega} < \frac{s_{adm}}{w} \qquad \rightarrow \qquad w < \frac{s_{adm} \cdot \Omega}{N} = \frac{260\left(\frac{N}{mm^2}\right) \cdot 2610(mm^2)}{150 \cdot 10^3 (N)} = 4{,}52 \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

El valor más próximo de tablas, del lado de la seguridad, es ω = 4,51, que se corresponde con una esbeltez λ = 161. Por tanto:

$$l_{xy} = 0{,}389L < 161 \qquad \rightarrow \qquad L < 413\,cm \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

Una ejecución más general para decidir qué plano debe ser biempotrado:

Si se elige como biempotrado ***xz****:*

$$l_{xy} = \frac{2L}{i_z} \quad \rightarrow \quad l_{xy} = \frac{2L(cm)}{\sqrt{\frac{690(cm^4)}{26{,}1(cm^2)}}} = 0{,}389L$$

$$l_{xz} = \frac{0{,}5L}{i_y} \rightarrow \quad l_{xz} = \frac{0{,}5L(cm)}{\sqrt{\frac{410(cm^4)}{26{,}1(cm^2)}}} = 0{,}126L$$

Si se elige como biempotrado ***xy****:*

$$l_{xy} = \frac{0{,}5L}{i_z} \quad \rightarrow \quad l_{xy} = \frac{0{,}5L(cm)}{\sqrt{\frac{690(cm^4)}{26{,}1(cm^2)}}} = 0{,}097L$$

$$l_{xz} = \frac{2L}{i_y} \rightarrow \quad l_{xz} = \frac{2L(cm)}{\sqrt{\frac{410(cm^4)}{26{,}1(cm^2)}}} = 0{,}504L$$

De entre ambas elecciones, la primera es la que presenta un menor valor de la esbeltez máxima.