ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE
INGENIEROS INDUSTRIALES

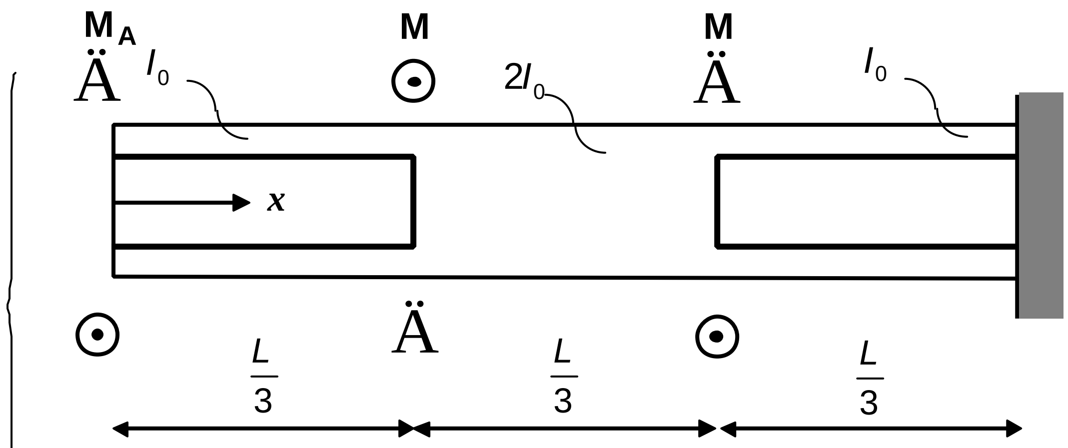
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE
MADRID

RESISTENCIA DE MATERIALES II **CURSO 2005-06**

EXAMEN DE JUNIO **23-6-2006**

CUESTIONES

1.- La barra es un sistema hiperestático externo de primer grado, que equivale a:

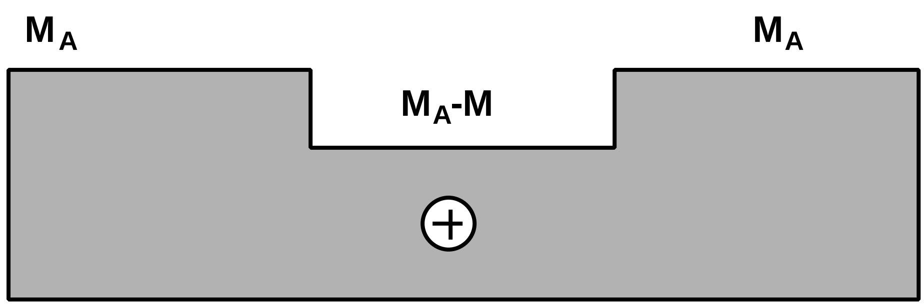


$$q(0)=0$$

Como el giro del extremo x = L es nulo, entonces la condición de compatibilidad es $q(x=L)-q(x=0)=0$, es decir: Los extremos no giran relativamente entre sí.

Esta condición, expresada en función del momento torsor es $0=\int_{x=0}^{x=L}\frac{M_T(x)}{GI_0(x)}dx$.

El diagrama de momentos torsores es (arbitrariamente se toma $M_A > M$):



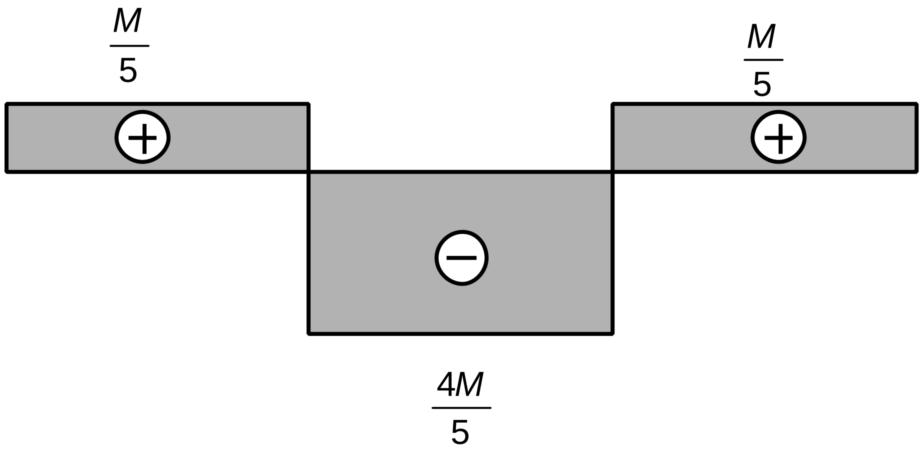
El momento torsor y el momento de inercia tiene tres intervalos de variación:

$$M_T(x) = \begin{cases} M_A & 0 \le x < \dfrac{L}{3} \\ M_A - M & \dfrac{L}{3} \le x < \dfrac{2L}{3} \\ M_A & \dfrac{2L}{3} \le x < L \end{cases} \qquad I_0(x) = \begin{cases} I_0 & 0 \le x < \dfrac{L}{3} \\ 2I_0 & \dfrac{L}{3} \le x < \dfrac{2L}{3} \\ I_0 & \dfrac{2L}{3} \le x < L \end{cases}$$

Por tanto, la condición de compatibilidad queda:

$$0 = \frac{M_A}{GI_0}\frac{L}{3} + \frac{M_A - M}{2GI_0}\frac{L}{3} + \frac{M_A}{GI_0}\frac{L}{3} \qquad \rightarrow \qquad M_A = \frac{M}{5}$$

El diagrama resultante es:



(1,5 puntos)

El trabajo se obtiene como $W = \int_o^L \frac{M_T^2(x)}{2GI_0(x)}dx$

Sustituyendo:

$$W = \left(\frac{M}{5}\right)^2 \frac{1}{2GI_0}\frac{L}{3} + \left(\frac{4M}{5}\right)^2 \frac{1}{2G(2I_0)}\frac{L}{3} + \left(\frac{M}{5}\right)^2 \frac{1}{2GI_0}\frac{L}{3} = \frac{1}{15}\frac{M^2}{GI_0}L \qquad \text{(1,5 puntos)}$$

2.- Debido a la carga F, cada pasador absorbe una fuerza de valor $\frac{F}{4}$, y tiene la misma dirección y sentido que F.

El módulo de la fuerza que cada pasador absorbe debida al momento es:

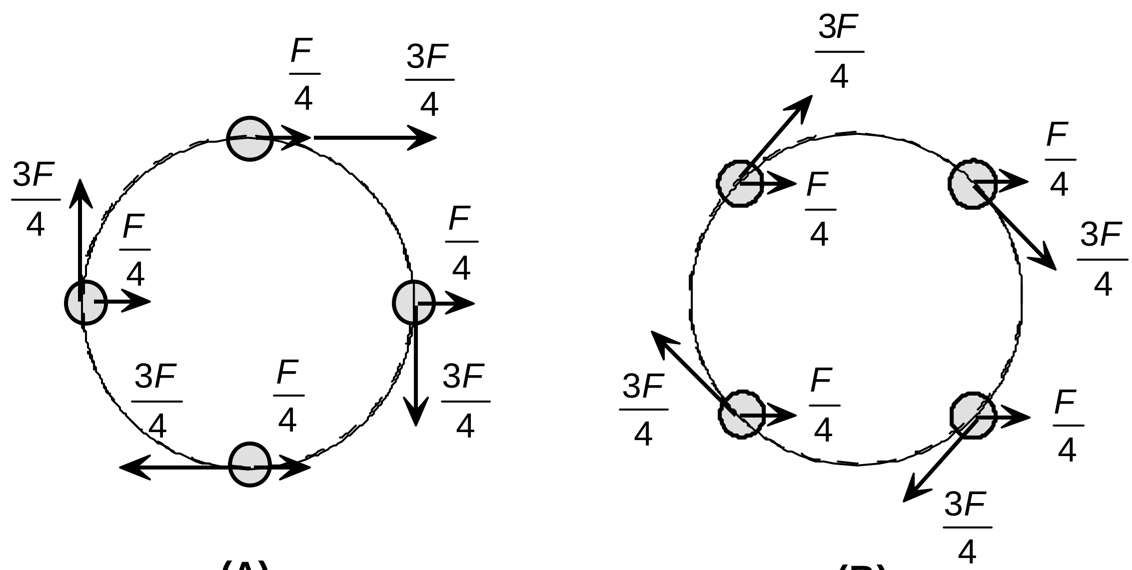
$$F_2 = M\frac{r_i\Omega_i}{\sum r_i^2\Omega_i}$$

Siendo r_i el radio vector desde el centro de gravedad de los pasadores hasta el centro del pasador i. Al ser todos iguales, se tiene que:

$$F_2 = 3Fr\frac{r\Omega}{4r^2\Omega} = \frac{3}{4}F$$

La dirección es perpendicular al radio vector y su sentido congruente con el del momento.

Por tanto, las cargas sobre los elementos de unión son:



(A) **(B)**

La composición vectorial de las fuerzas ofrecería el valor de la carga sobre cada pasador. Sin realizar cálculos, se observa que el pasador más desfavorable es el superior de la opción A. (1 punto)

Para el pasador superior de la opción A, y como solo hay una sección sometida a cortadura, se tiene que:

$$\frac{F}{\frac{p}{4} f^2} < t_{adm} \quad \rightarrow \quad f > \sqrt{\frac{4F}{p\, t_{adm}}}$$

Operando, y redondeando al entero superior:

$$f > \sqrt{\frac{4 \cdot 300(N)}{p \cdot 100\left(\frac{N}{mm^2}\right)}} = 2\ mm \qquad \text{(1 punto)}$$

3.- Las tensiones de tracción máximas se darán o en la cara superior de la viga en la sección C, o en la cara inferior en la sección D.

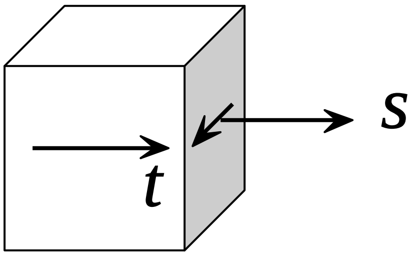
La ley de tensiones es $s_x = -\frac{M_z}{I_z} y$.

Cara superior. Sección C: $s_x = \frac{50 \cdot 10^6 (N \cdot mm)}{308{,}3 \cdot 10^6 (mm^4)} 125(mm) = 20MPa$ (1 punto)

Cara inferior. Sección D: $s_x = \dfrac{45\cdot 10^6 (N\cdot mm)}{308{,}3\cdot 10^6 (mm^4)} 150(mm) = 26 MPa$ (1 punto)

Por tanto, la tensión de tracción máxima se da en la cara inferior de la sección D.

4.- El estado tensional en la barra es de flexión y torsión (se desprecia el efecto del esfuerzo cortante). El estado, respecto a una referencia local, en cualquier punto de cada sección será:



Las tensiones principales son:

$$s_1 = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2} \qquad s_2 = 0 \qquad s_3 = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2}$$

Según el criterio de Tresca, debe verificarse que:

$$s_{eq} = s_1 - s_3 < s_e \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t^2} < s_e \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

El mayor valor de la tensión equivalente se da en los puntos superior e inferior de cada sección, en los cuales son máximas simultáneamente la tensión normal y la cortante. La condición quedaría como:

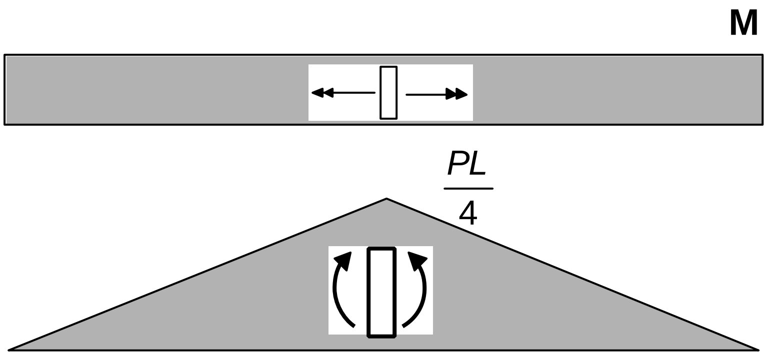
$$2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{M_F}{\frac{p}{64}f^4}\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{M_T}{\frac{p}{32}f^4}\frac{f}{2}\right)^2} < s_e \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{(M_F)^2 + (M_T)^2}}{\frac{p}{32}f^3} < s_e \quad \rightarrow \quad f^3 > \frac{32}{p}\frac{\sqrt{(M_F)^2 + (M_T)^2}}{s_e}$$

(1 punto)

El momento torsor en los extremos se obtiene a partir de la potencia:

$$Pot = M\cdot w \quad \rightarrow \quad M = \frac{30\cdot 10^6 \left(\frac{N\cdot m}{s}\right)}{500\left(\frac{rev}{min}\right)\cdot \frac{2p\left(\frac{rad}{rev}\right)}{60\left(\frac{s}{min}\right)}} = 573\ N\cdot m \qquad \text{(0,5 puntos)}$$

Los diagramas de momento torsor y de momento flector son:



En la sección central se dan, simultáneamente, los valores máximos de ambos momentos, y por ello la tensión equivalente es máxima (sección más desfavorable).

$$\left|M_T\right|_{máx} = M \quad \rightarrow \quad \left|M_T\right|_{máx} = 5{,}73 \cdot 10^5\ N \cdot mm$$

$$\left|M_F\right|_{máx} = \frac{PL}{4} \quad \rightarrow \quad \left|M_F\right|_{máx} = \frac{6 \cdot 10^3 (N) \cdot 8 \cdot 10^2 (mm)}{4} = 12 \cdot 10^5\ N \cdot mm$$

(0,5 puntos)

Sustituyendo valores y redondeando al entero superior:

$$f^3 > \frac{32}{p} \frac{\sqrt{(12)^2 + (5{,}73)^2} \cdot 10^5 (N \cdot mm)}{200 \left(\frac{N}{mm^2} \right)} = 0{,}68 \cdot 10^5 mm^3 \quad \rightarrow \quad f > 41\, mm$$

(0,5 puntos)