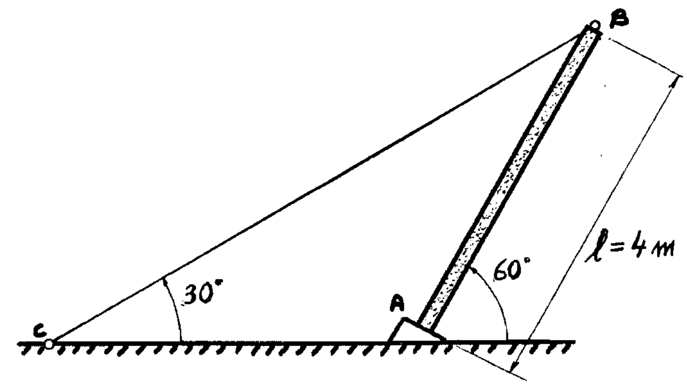
INDUSTRIALES
ETSII | UPM

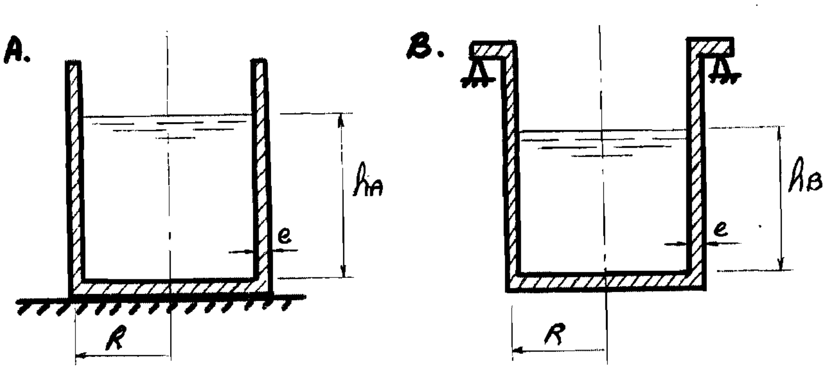
RESISTENCIA DE MATERIALES II. **CURSO 2007-08**
EXAMEN DE FEBRERO. **11-2-2008**

CUESTIONES (2º bloque)

1ª) El poste *AB* de la figura es de sección circular de radio *R=0,25m* y está hecho de hormigón de peso específico γ = *25kN/m³*. Se pide determinar entre qué valores de carga puede tensarse el cable *BC* para que en la sección del empotramiento *A* no aparezcan tensiones de tracción.
(4 puntos)



2ª) Los dos depósitos de la figura son cilíndricos de radio medio *R*, pequeño espesor *e* y están llenos de un mismo líquido de peso específico γ. El material constituyente también es el mismo y tiene de límite elástico σ_e. Estando el depósito *A* apoyado en el suelo y el *B* suspendido de la base superior, se pide determinar razonadamente la relación h_A/h_B entre las máximas alturas de llenado compatibles con la resistencia de los depósitos según el criterio de Mises.
NOTA: considérense únicamente las tensiones de membrana
(3 puntos)



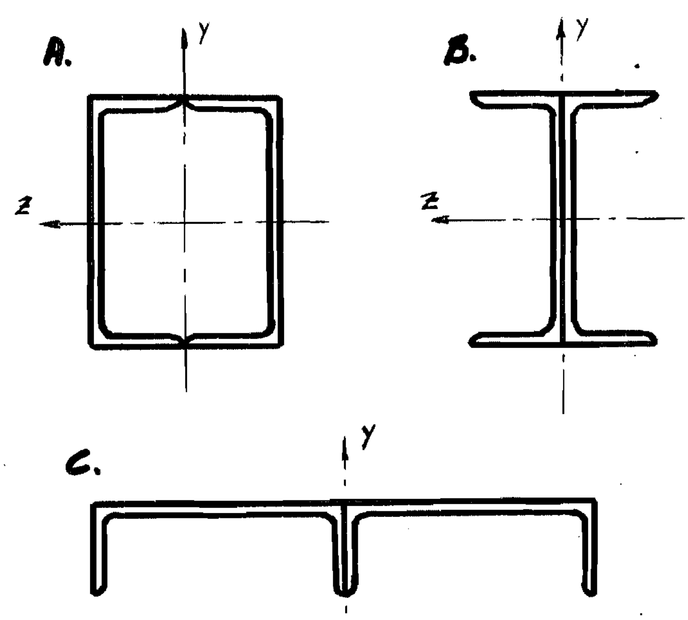
3ª) Mediante dos perfiles *UPN-200* se pretende construir un soporte de *6m* empotrado por su extremo inferior y libre por el superior. Se consideran las tres configuraciones indicadas en la figura: A) En cajón, B) Soldados por las alma y C) Soldados por las alas. Para cada configuración se pide:

1º) Hallar los momentos de inercia respecto a los ejes principales de inercia

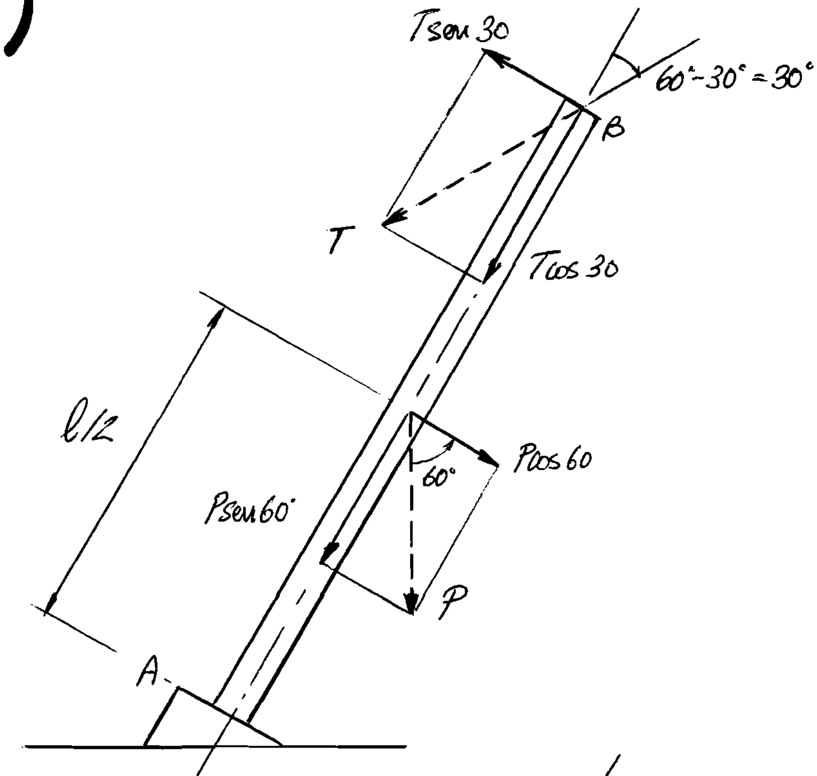
2º) Razonar cuál es el plano de pandeo

3º) Carga crítica teórica en *kN*

(DATO: *E=200.000MPa*)
(3 puntos)



1º)



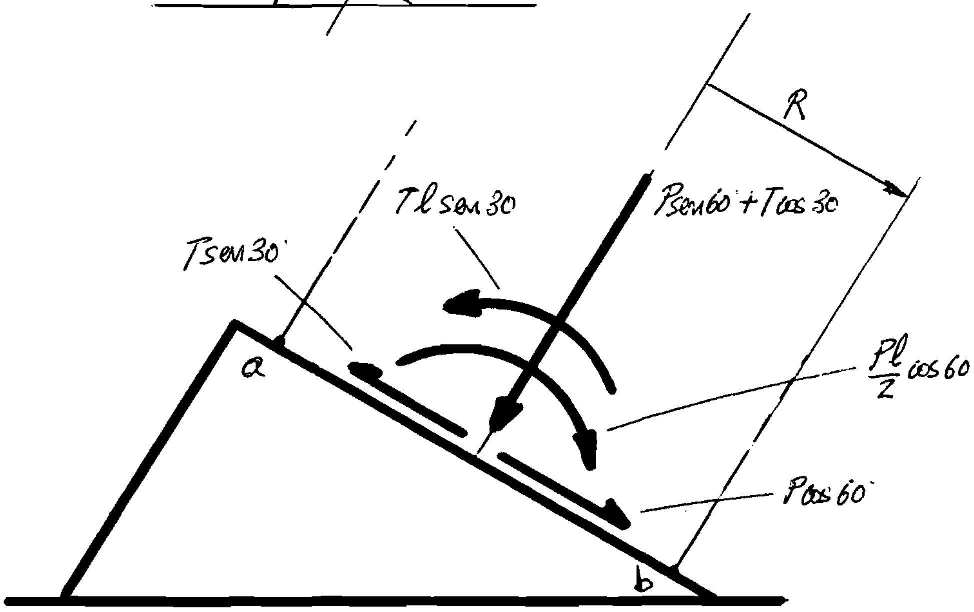
$T \equiv$ tensión del cable

$P = \gamma \Omega l$ = peso del poste

$\Omega = \pi R^2$

Sustituyendo:

$$P = 25 \frac{kN}{m^3} \cdot \pi \cdot 0{,}25^2 m^2 \cdot 4m = 19{,}635 kN$$



Solicitaciones en la sección del empotramiento:

Las tensiones normales máximas se darán en los puntos a y b de la sección

$$\sigma_a = -(P\operatorname{sen}60 + T\cos 30) - \frac{Tl\operatorname{sen}30}{I} R + \frac{Pl/2 \cdot \cos 60}{I} \cdot R$$

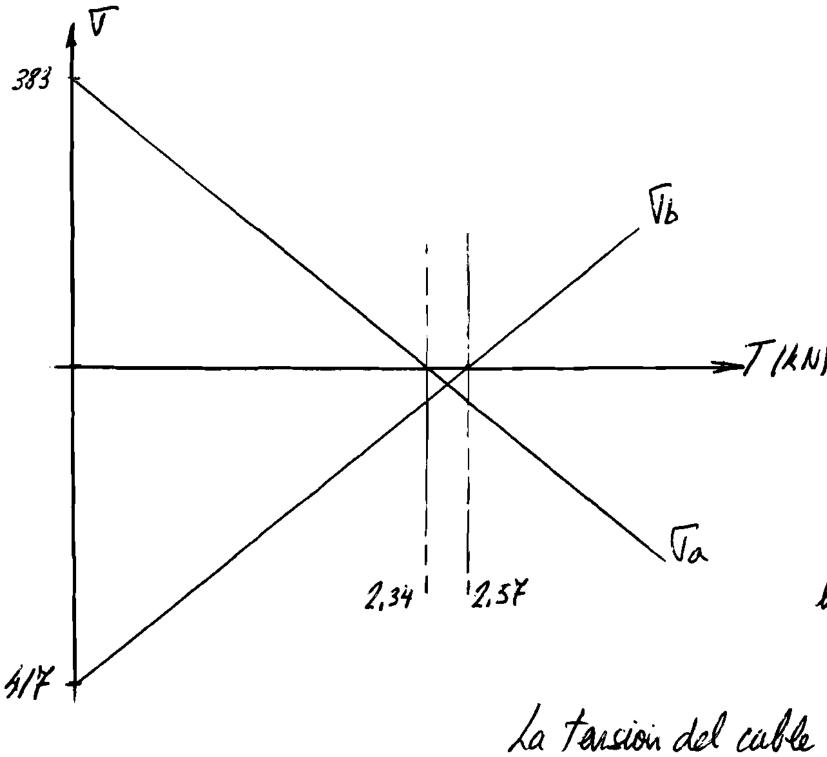
$$\sigma_b = -(P\operatorname{sen}60 + T\cos 30) + \frac{Tl\operatorname{sen}30}{I} R - \frac{Pl/2 \cos 60}{I} \cdot R$$

$(I = \pi R^4/4)$

Sustituyendo y operando:

$$\sigma_a = 383 - 163{,}87\, T$$

$$\sigma_b = -417 + 162{,}1\, T$$

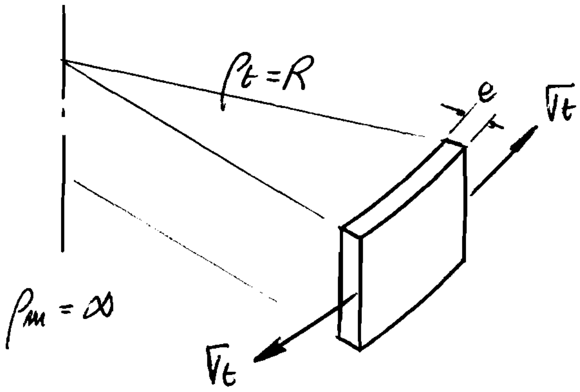


luego: $\sigma_a < 0$ para $T \geq 2{,}34 kN$
$\sigma_b < 0$ para $T \leq 2{,}57 kN$

La tensión del cable debe ser: $2{,}34 kN \leq T \leq 2{,}57 kN$

2º)

En el depósito A, la presión en el fondo es: $p = \gamma h_A$, y el estado de tensiones de membrana es:



De la ecuación de Laplace: $\cancel{\dfrac{\sigma_m}{\rho_m}} + \dfrac{\sigma_t}{\rho_t} = \dfrac{p}{e}$

luego: $\sigma_t = \dfrac{pR}{e} = \dfrac{\gamma h_A \cdot R}{e}$

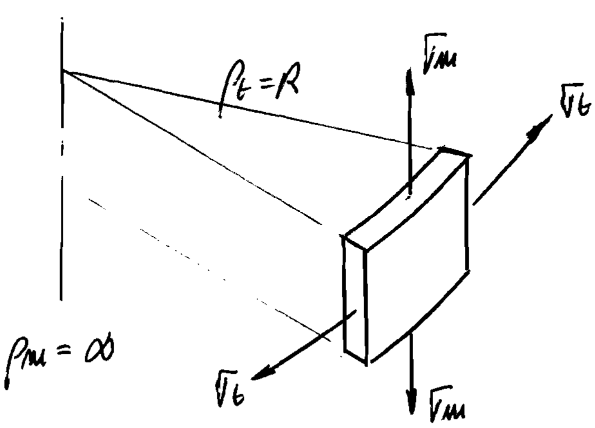
y $\sigma_m = 0$ porque el peso del líquido es compensado por la reacción del terreno.

Por tanto: $\sigma_1 = \sigma_t = \gamma h_A R/e \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

Criterio de Mises: $(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 = 2\sigma_e^2$, luego la altura máxima es:

$$h_A = \sigma_e\, e/\gamma R$$

En el depósito B, la presión en el fondo es $p = \gamma h_B$, y el estado de tensiones de membrana es:



De la ecuación de Laplace: $\sigma_t = \dfrac{pR}{e} = \dfrac{\gamma h_B \cdot R}{e}$

Como todo el peso del líquido es compensado por la reacción del apoyo de la base superior, el cuerpo cilíndrico se encuentra sometido a una tracción uniforme:

$$\sigma_m = \frac{\gamma \pi R^2 h_B}{2\pi R \cdot e} = \frac{\gamma R h_B}{2e}$$

Por tanto, $\sigma_1 = \sigma_t = \gamma h_B R/e$; $\sigma_2 = \sigma_m = \gamma h_B R/2e$; $\sigma_3 = 0$

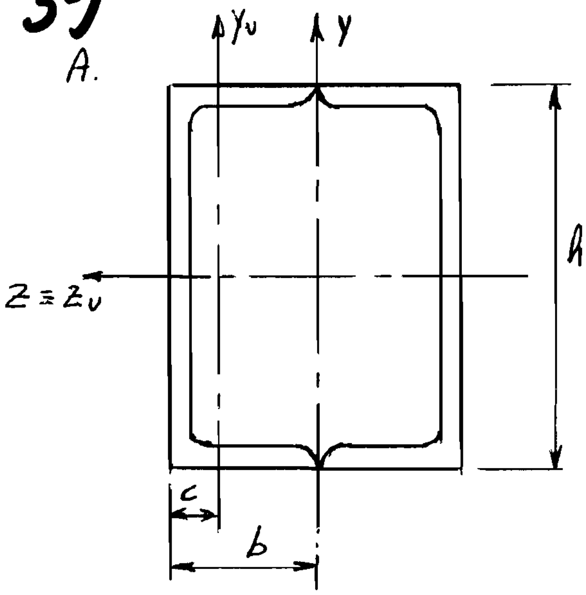
Criterio de Mises: $(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 = \left(\dfrac{\gamma h_B R}{2e}\right)^2 + \left(\dfrac{\gamma h_B R}{2e}\right)^2 + \left(\dfrac{\gamma h_B R}{e}\right)^2 = 2\sigma_e^2$

resultando una altura máxima: $h_B = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\dfrac{\sigma_e e}{\gamma R}$

Por tanto: $\dfrac{h_A}{h_B} = \dfrac{\sigma_e \cdot e/\gamma R}{2\sigma_e e/\sqrt{3}\,\gamma R} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$

3º)

A.



TABLAS UPN-200: $h = 20\,cm$; $b = 7{,}5\,cm$; $c = 2{,}01\,cm$
$I_{yv} = 148\,cm^4$; $I_{zv} = 1910\,cm^4$
$A_v = 32{,}2\,cm^2$

CONFIGURACIÓN A:

$$A = 2A_v = 64{,}4\,cm^2$$

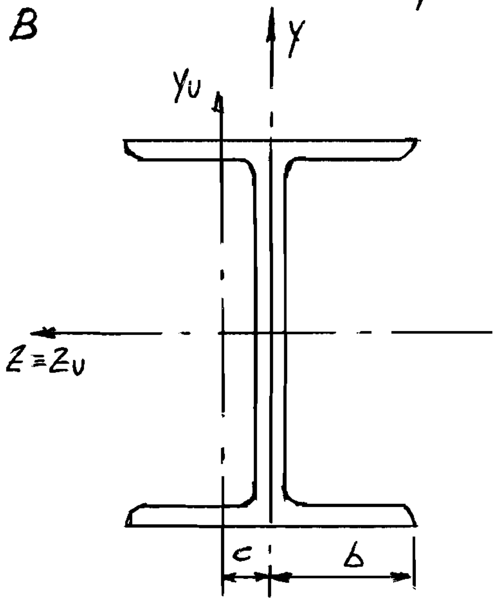
$$I_y = 2(I_{yv} + A_v(b-c)^2) = 2.237\,cm^4$$

$$I_z = 2 \cdot I_{zv} = 3820\,cm^4$$

$I_z > I_y \Rightarrow$ el plano de pandeo es el XZ ; $l_p = 2l = 12\,m$.

$$P_{crit_A} = \frac{\pi^2 \cdot E I_y}{l_p^2} = \frac{\pi^2 \cdot 200.000\,N/mm^2 \cdot 2237\,cm^4}{4 \cdot 600^2\,cm^2} = 306{,}6\,kN$$

B



CONFIGURACION B:

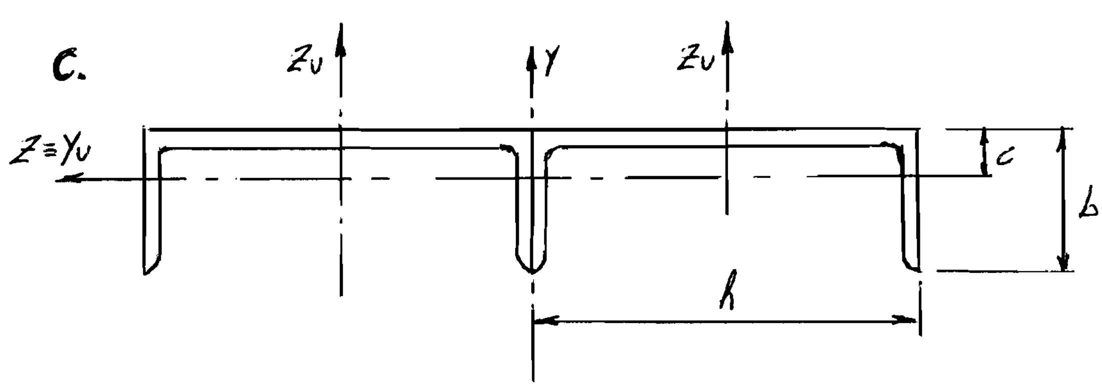
$$I_y = 2(I_{yv} + A_v \cdot c^2) = 556{,}2\,cm^4$$

$$I_z = 2 I_{zv} = 3820\,cm^4$$

$I_z > I_y \Rightarrow$ el plano de pandeo es el XZ

$$P_{crit_B} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{l_p^2} = 76{,}23\,kN$$

C.



CONFIGURACION C:

$$\left.\begin{aligned} I_y &= 2(I_{zv} + A_v(h/2)^2) = 10.260\,cm^4 \\ I_z &= 2 I_{yv} = 296\,cm^4 \end{aligned}\right\} I_y > I_z \Rightarrow \text{el plano de pandeo es el XY}$$

$$P_{crit_C} = \frac{\pi^2 E I_z}{l_p^2} = 40{,}57\,kN$$