RESISTENCIA DE MATERIALES II
EXAMEN DE JUNIO

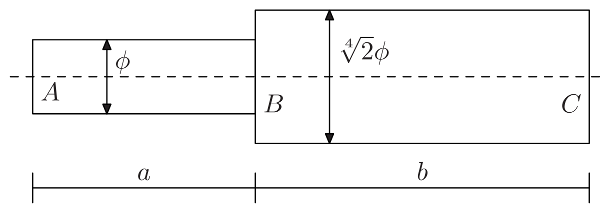
CURSO 2007-08
16-9-2007

Fecha de publicación de la preacta: 7 de Julio
Fecha de revisión del examen: 10 de Julio

BLOQUE B

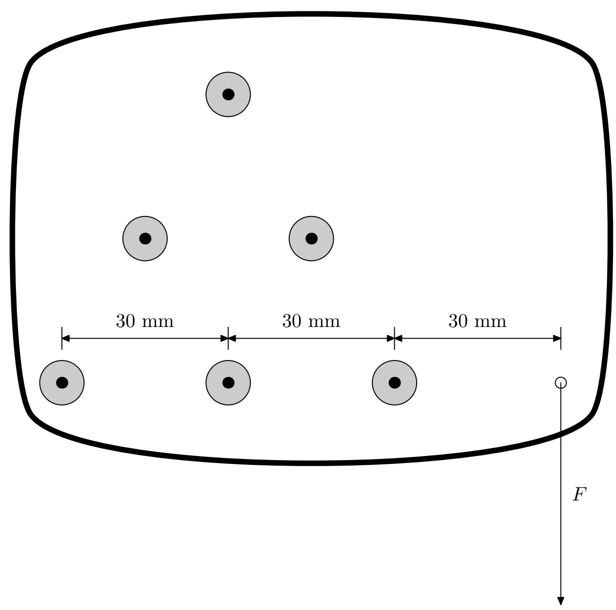
Cuestión B.1 (2 puntos)

Dos ejes circulares están soldados como indica la figura. Con el extremo A completamente sujeto y el C libre, se aplica un par M_1 en la sección B. Con los ejes deformados, se sujeta ahora el extremo C y se retira el par M_1. Calcular las reacciones en los apoyos y el giro en el punto B respecto de la configuración inicial.



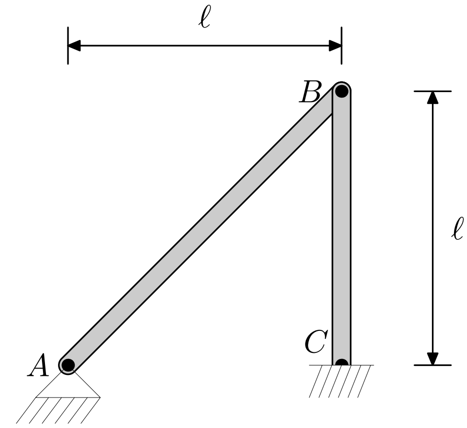
Cuestión B.2 (2 puntos)

Los remaches de la unión de la figura están dispuestos de forma equidistante sobre un triángulo equilátero de 60 mm de lado y tienen 10 mm de diámetro. Indica qué remache fallará primero bajo la acción de la carga F y cuál será el módulo de dicha carga en el instante de fallo. Dato: $\tau_{max} = 140$ MPa.



Cuestión B.3 (3 puntos)

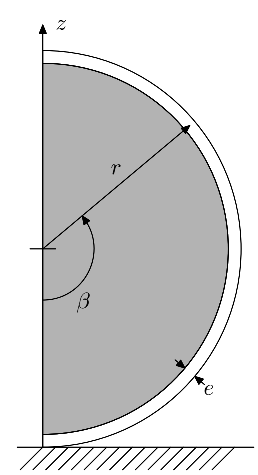
La estructura de la figura está formada por dos barras rectas articuladas que pueden moverse únicamente en su plano. ¿Cuál es el máximo incremento térmico (negativo) que puede sufrir la barra BC sin que la barra AB pandee? Datos: módulo de Young E, sección A, momento de inercia I, coeficiente de dilatación térmica α.



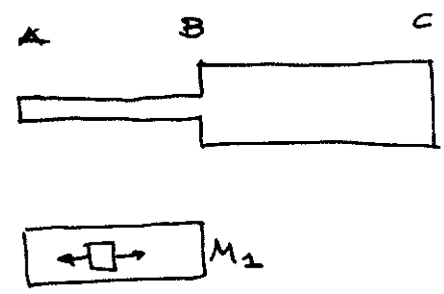
Cuestión B.4 (3 puntos)

Un depósito esférico de radio medio r y de pequeño espesor e está completamente lleno de un fluido de peso específico γ. Calcular el valor de las tensiones de membrana para cualquier valor del ángulo β. Nota: Volumen de un casquete esférico de altura h y radio r

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$$



Cuestión B1



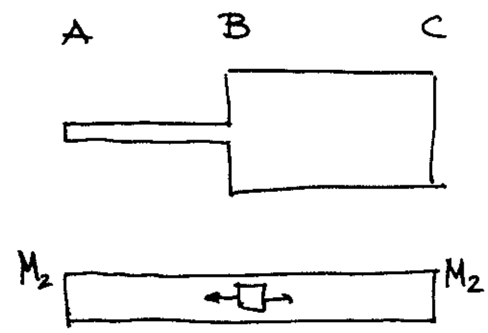
Estado de deformación 1:

Giros relativos:

$$\theta_{AB} = \frac{M_1 \cdot a}{G\, I_0^{AB}}$$

$$\theta_{BC} = 0$$

$$\Rightarrow \theta_{AC} = \theta_{AB} + \theta_{BC} = \frac{M_1 \cdot a}{G\, I_0^{AB}}$$



Estado de deformación 2:

El giro relativo θ_{AC} se mantiene debido al nuevo empotramiento en C

$$\theta'_{AB} = \frac{M_2 \cdot a}{G\, I_0^{AB}}$$

$$\theta'_{BC} = \frac{M_2 \cdot b}{G\, I_0^{BC}}$$

$$\theta'_{AC} = \theta'_{AB} + \theta'_{BC} = \theta_{AB} \Rightarrow \frac{M_2}{G}\left(\frac{a}{I_0^{AB}} + \frac{b}{I_0^{BC}}\right) = \frac{M_1}{G}\,\frac{a}{I_0^{AB}}$$

De la última ecuación despejamos M_2

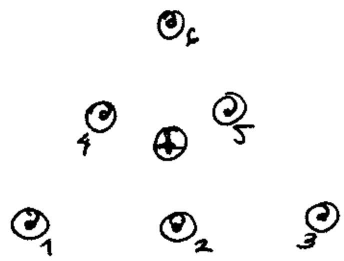
$$M_2 = M_1\,\frac{a}{I_0^{AB}}\left(\frac{a}{I_0^{AB}} + \frac{b}{I_0^{BC}}\right)^{-1} = \frac{M_1\, a}{I_0^{AB}}\left(\frac{a + b/2}{I_0^{AB}}\right)^{-1} = \boxed{M_1\,\frac{a}{a + b/2}}$$

Y el ángulo de giro:

$$\theta'_{AB} = \frac{M_2 \cdot a}{G\, I_0^{AB}} = \boxed{\frac{M_1}{G}\,\frac{a^2}{a + b/2}\,\frac{1}{\pi/32\, \phi^4}}$$

Cuestión B2

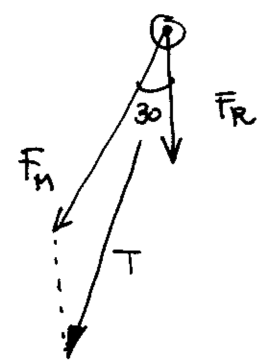
El centro de gravedad de la distribución de remaches está en el centro de gravedad del triángulo. La resultante y el momento resultante respecto de dicho punto son:



$$R = F$$

$$M_z = -60F$$

El tornillo más solicitado es el número 3. Sobre él actúa una fuerza debida al reparto de R y otra debida al reparto de M_z.



$$F_R = \frac{F}{6}$$

$$|F_M| = \frac{1}{\sum r_j^2}\,|M_z|\,r_3 = \frac{M_z \cdot 30/\cos 30}{3\cdot\left(\frac{30}{\cos 30}\right)^2 + 3\cdot(30\,tg 30)^2} = 0{,}462F$$

Por el teorema del coseno, la fuerza total que resiste el tornillo 3 es:

$$T = \left(F_M^2 + F_R^2 - 2F_M F_R \cos 150\right)^{1/2} = F\cdot 0{,}61$$

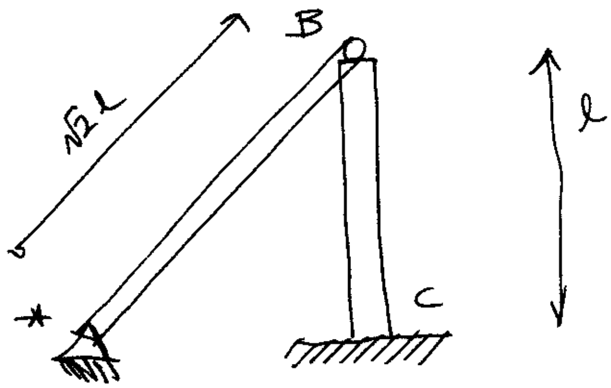
y la tensión máxima es $\tau = \frac{F\cdot 0{,}61}{\pi/4\,\phi^2}$. Cuando se alcanza el límite elástico:

$$\tau = \frac{0{,}61\cdot F}{\pi/4\cdot\phi^2} = 140 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \quad F = 140\,\frac{N}{mm^2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 10^2\,mm^2/0{,}61 = \boxed{18025\ N}$$

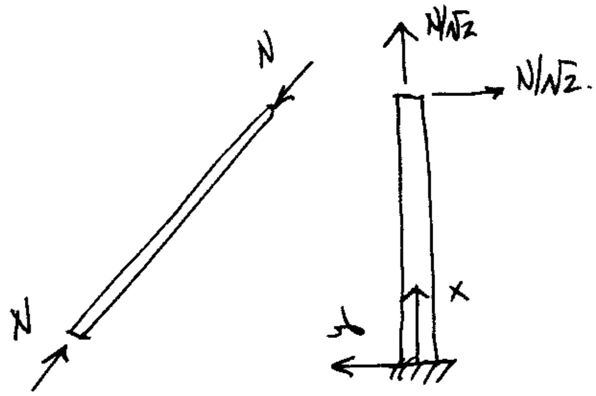
Cuestión B3

Sea N el esfuerzo de compresión en la barra AB



La deformación axial de BC es:

$$u = \frac{N}{\sqrt{2}}\frac{l}{AE} + \Delta T \alpha l$$

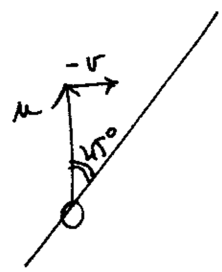


La deformación transversal de BC es:

$$v = -\frac{N/\sqrt{2}\; l^3}{3EI}$$

Por compatibilidad geométrica, el alargamiento de AB ha de ser:

$$\delta_{AB} = \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}}$$



Así que,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{Nl}{\sqrt{2}AE} + \Delta T \alpha l\right] + \frac{1}{6}\frac{Nl^3}{EI} = \frac{-N\sqrt{2}l}{EA}$$

$$N\left[\frac{-l^3}{6EI} - \frac{\sqrt{2}l}{EA} - \frac{l}{2EA}\right] = \frac{\alpha l}{\sqrt{2}}\Delta T \Rightarrow N = -K\,\Delta T$$

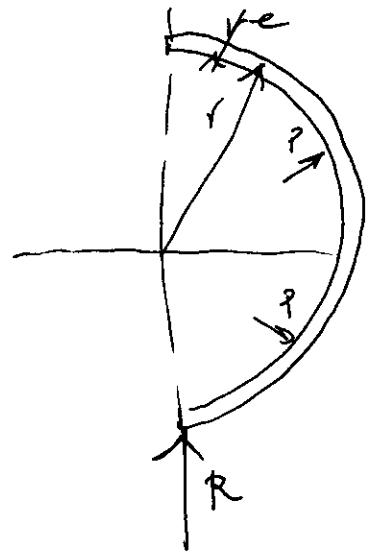
$$K = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left[\frac{l^2}{6EI} + \frac{\sqrt{2}}{EA} + \frac{1}{2EA}\right]^{-1}$$

Cuando la barra AB pandea, por la teoría de Euler;

$$N = \frac{\pi^2 EI}{(\sqrt{2}l)^2} \qquad \text{por lo que:} \quad \Delta T = \frac{N}{-K} = \boxed{-\frac{\pi^2 EI}{K l^2 2}}$$

Cuestión B4

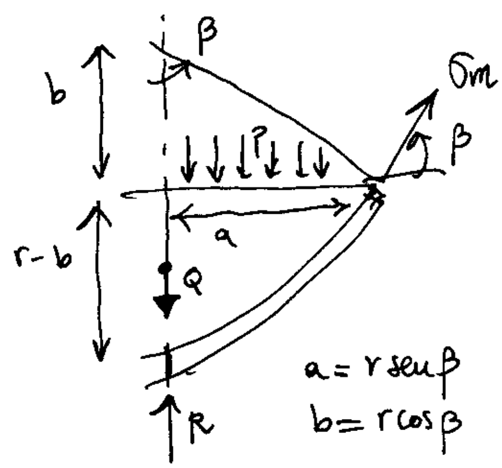
Reacción del terreno



$$R = \frac{4}{3}\pi r^3 \gamma$$

(despreciando el peso del depósito)

Cálculo de las tensiones meridionales



Aislamos un casquete esférico:

Fuerza total del fluido hacia abajo:

$$F_f = \pi a^2 p + \frac{\pi}{3}(r-b)^2(3r+b-r)\gamma$$

$$= \pi a^2 (r+b)\gamma + \frac{\pi}{3}(r-b)^2(2r+b)\gamma$$

Equilibrio vertical:

$$\sigma_m \cdot 2\pi a \operatorname{sen}\beta + R = \pi a^2 (r+b)\gamma + \frac{\pi}{3}(r-b)^2(2r+b)\gamma$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2\pi a \operatorname{sen}\beta}\left[\gamma\pi a^2 (r+b) + \frac{1}{3}\gamma\pi (r-b)^2(2r+b) - \gamma\pi \frac{4}{3} r^3\right]$$

$$= \frac{\gamma}{2 a \operatorname{sen}\beta}\left[a^2 (r+b) - \frac{1}{3}(r+b)^2(2r-b)\right]$$

Cálculo de las tensiones circunferenciales

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sigma_m}{r} + \frac{\sigma_c}{r} = \frac{p}{e} \\ &p = \gamma(r+b) = \gamma r(1+\cos\beta) \end{aligned}\right\} \sigma_c = \frac{\gamma r^2 (1+\cos\beta)}{e} - \sigma_m$$