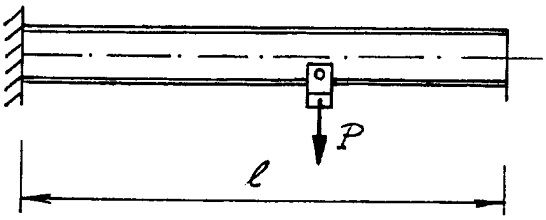
INDUSTRIALES
ETSII | UPM

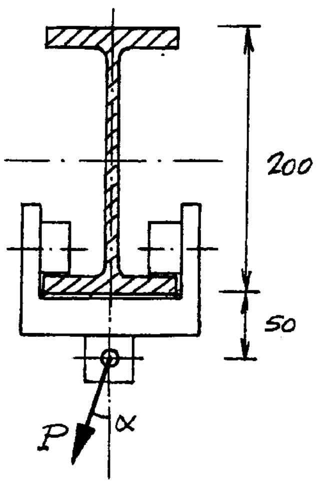
RESISTENCIA DE MATERIALES II.
EXAMEN DE SEPTIEMBRE.

CURSO 2007-08
1-9-2008

PROBLEMA

La figura muestra una viga en voladizo de longitud ℓ=2 m, y sección IPE-200. Su ala inferior sirve como carril para un polipasto que recorre toda la viga transportando una carga P, la cual puede estar desviada en el plano transversal un ángulo α.





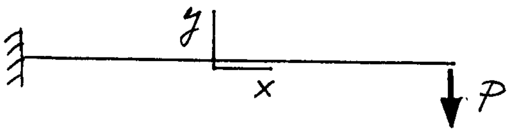
Si el material tiene una tensión admisible σ_{adm}=150 MPa, y en el diseño se aplica el criterio de Mises, se pide:

1. Determinar el valor máximo de la carga sin desviar: α=0. (2 puntos)
2. Asimilando la sección de la viga a un perfil de pared delgada, con radio de acuerdo nulo en la unión ala-alma, determinar su módulo de torsión I_T. Comparar su valor con el indicado en las tablas, justificando la discrepancia entre ambos. (3 puntos)
3. En el caso de desviación máxima de la carga, α=arcsen⅓, y utilizando para la torsión las fórmulas de pared delgada con el módulo de torsión de las tablas, determinar el valor máximo de la carga. (5 puntos)

Nota: No se considera el peso de la viga.

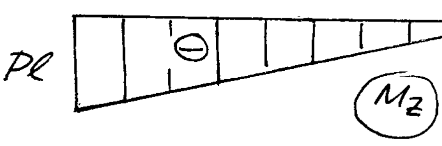
---

1. La situación más desfavorable se da con la carga en el extremo, siendo la sección más crítica la del empotramiento



$$|M_z|_{max} = P\ell$$

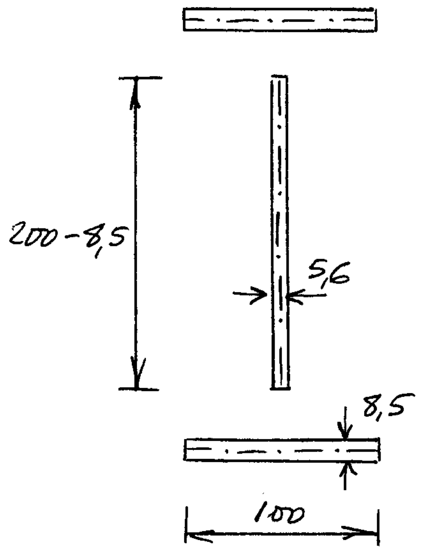
$$\sigma_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{W_z} = \frac{P\ell}{W_z} \leq \sigma_{adm}$$



$$P \leq \frac{W_z \cdot \sigma_{adm}}{\ell} = \frac{194\cdot 10^3 \cdot 150}{2000} =$$

$$= 14550\ N = 14{,}55\ kN$$

2. La sección se asimila a 3 rectángulos de espesor constante.



$$I_T = \frac{1}{3}\int e^3 ds = \frac{1}{3}\left[2\cdot 8{,}5^3\cdot 100 + 5{,}6^3\cdot 191{,}5\right] =$$

$$= 52152\ mm^4 = 5{,}22\ cm^4$$

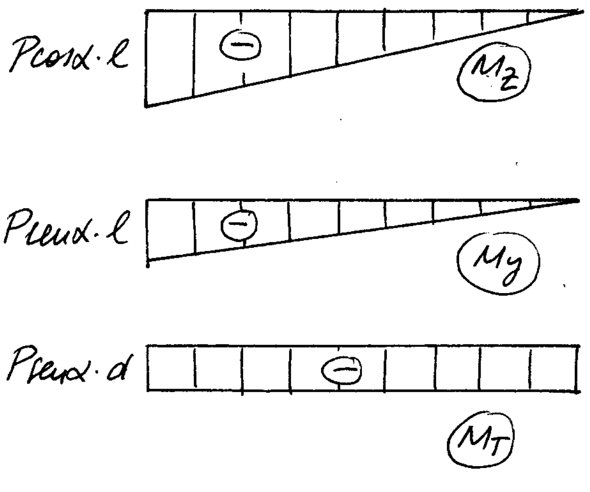
El valor dado en las tablas es $6{,}67\ cm^4$, que es un 27,8 % mayor.

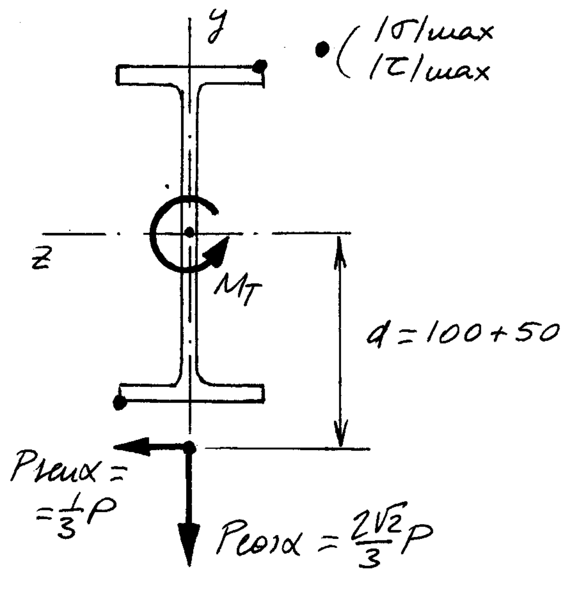
La diferencia obtenida se explica mediante la "Analogía de la membrana", por la que el módulo de torsión I_T de una sección es proporcional al volumen de una membrana tensa, soportada en su contorno y sometida a presión.

En el perfil real existe continuidad del desplazamiento de la membrana en las uniones ala-alma, y el espesor es mayor debido al radio de acuerdo. Estas dos circunstancias, sobre todo la primera, hacen que el volumen aumente.

En los 3 rectángulos de la aproximación de pared delgada el espesor es constante, y no hay desplazamiento de la membrana en sus contornos, produciéndose discontinuidad en las uniones ala-alma. El volumen es la suma de los 3 volúmenes.

3. Descomponemos la carga en sus proyecciones vertical y horizontal.





$$|M_z|_{max} = P\cos\alpha \cdot l = P\frac{2\sqrt{2}}{3}l$$
$$|M_y|_{max} = P\sin\alpha\, l = P\frac{1}{3}l$$
$$|M_T|_{max} = P\sin\alpha \cdot d = P\frac{1}{3}d$$

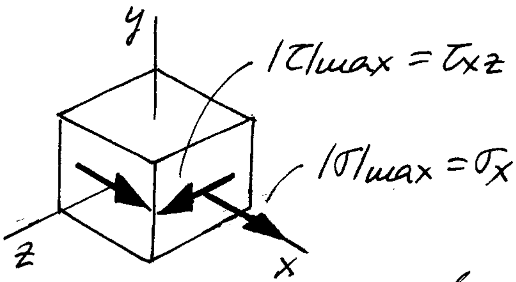
La tensión normal máxima (en valor absoluto) se produce en las 2 esquinas del perfil indicadas en la figura

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{W_z} + \frac{|M_y|_{max}}{W_y} = \frac{Pl}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{W_z} + \frac{1}{W_y}\right)$$

La tensión tangencial máxima (en valor absoluto) se produce en los bordes de las alas, que es donde el espesor es mayor.

$$|\tau|_{max} = \frac{|M_T|}{W_T} = \frac{Pd}{3W_T} \qquad \text{siendo } W_T = \frac{I_T}{e_{ala}}$$

El estado tensional da lugar a unas tensiones principales:



$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$
$$\sigma_2 = 0$$

Con lo que la tensión equivalente del criterio de Mises resulta:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xz}^2}$$

Sustituyendo:

$$\sigma_{eq} = \frac{P}{3}\sqrt{l^2\left(\frac{2\sqrt{2}}{W_z} + \frac{1}{W_y}\right)^2 + 3\frac{d^2}{W_T^2}} =$$
$$= \frac{P}{3}\sqrt{2000^2\left(\frac{2\sqrt{2}}{194\cdot 10^3} + \frac{1}{28{,}5\cdot 10^3}\right)^2 + 3\left(\frac{150\cdot 8{,}5}{6{,}67\cdot 10^4}\right)^2} =$$
$$= \frac{P}{3}\sqrt{9867\cdot 10^{-6} + 3\cdot 366\cdot 10^{-6}} = P\cdot 34{,}9\cdot 10^{-3} \text{ MPa para } P \text{ en N}$$

$$\sigma_{eq} = P\cdot 34{,}9\cdot 10^{-3} \leq \sigma_{adm} \longrightarrow P \leq \frac{150}{34{,}9\cdot 10^{-3}} = 4{,}3\cdot 10^3\,\text{N} = 4{,}3\text{ kN}$$