

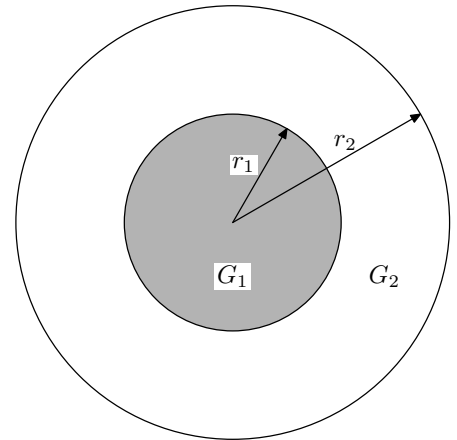
**Fecha de publicación de la preacta: 20 de Febrero**  
**Fecha de revisión del examen: 25 de Febrero**

**BLOQUE A**

### Cuestión A.1 (3 puntos)

Un cilindro de longitud  $L$  está fabricado con un núcleo de un material de módulo cortante  $G_1$  y el exterior de otro material distinto con módulo cortante  $G_2$ , como se indica en la figura.

- Encontrar el valor del giro relativo  $\theta$  entre los extremos del cilindro cuando éste se somete a torsión pura de valor  $M_t$ , en función de  $M_t, G_1, G_2, I_1^o, I_2^o$  (1 punto).
- Si el núcleo es de acero y el exterior de bronce, dibujar el estado tensional en una sección cualquiera cuando el par tiene valor  $M_t = 2500$  N m. Datos:  $r_1 = 30$  mm,  $r_2 = 45$  mm (1 punto).
- Si los límites elásticos de los materiales son  $\sigma_e^{acero} = 200$  MPa y  $\sigma_e^{bronce} = 70$  MPa, determinar, de acuerdo con el criterio de Tresca, el valor admisible del par torsor (1 punto).



### Cuestión A.2 (3 puntos)

Una viga de acero con longitud  $L = 3$  m y sección UPN 180 biapoyada está sometida a una fuerza vertical de valor  $F = 2200$  N en el centro del vano. Colocando la viga de forma que su rigidez a flexión sea máxima, se pide:

- La tensión normal máxima (0,5 puntos).
- La tensión tangencial máxima (1 punto).

Girando la viga  $90^\circ$ , de forma que su rigidez a flexión sea mínima, volver a calcular:

- La tensión normal máxima (0,5 puntos).
- La tensión tangencial máxima (1 punto).

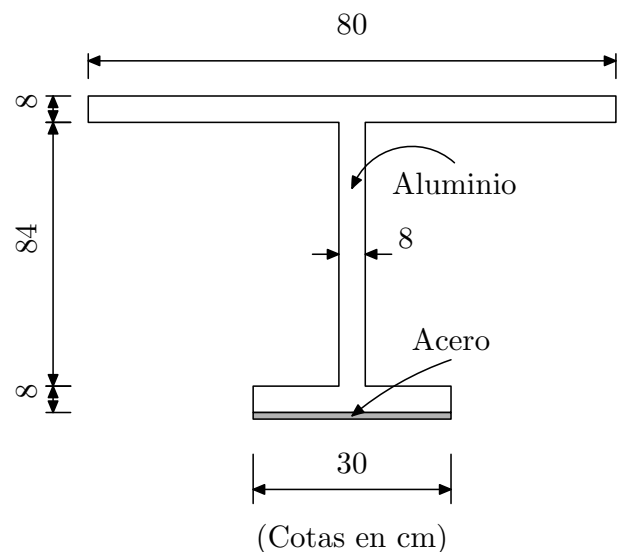
(NOTA: suponer que el espesor del perfil es constante e igual al valor 'e' de las tablas)

### Cuestión A.3 (4 puntos)

Una viga de aluminio se refuerza con una chapa de acero de 2 cm de espesor, como se indica en la figura. Si la sección está sometida a un esfuerzo flector  $M = 650$  kN m respecto del eje con mayor inercia, se pide:

- Encontrar la posición del eje neutro (2 puntos.)
- Determinar las tensiones máximas en el aluminio y en el acero (2 puntos).

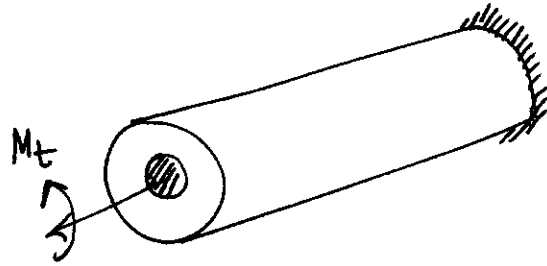
Datos:  $E_{ac} = 210$  GPa,  $E_{al} = 70$  GPa.



QUESTION 1

- a) Al aplicar un momento  $M_t$  externo, este se reparte entre el núcleo y el exterior.

$$M_t = M_1 + M_2.$$



Como los dos materiales se mueven solidariamente el ángulo de giro de los dos tubos es el mismo:

$$\theta_1 = \frac{M_1 L}{G_1 I_1^o}, \quad \theta_2 = \frac{M_2 L}{G_2 I_2^o}, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta$$

Despejando,

$$M_t = \frac{G_1 I_1^o}{L} \theta + \frac{G_2 I_2^o}{L} \theta = \frac{G_1 I_1^o + G_2 I_2^o}{L} \theta$$

$$\theta = \frac{M_t \cdot L}{G_1 I_1^o + G_2 I_2^o}$$

b) Si el núcleo es de acero  
y el exterior de bronce, según los datos del problema:

$$G_1 = \frac{E_{ac}}{2(1+\nu_{ac})} = \frac{210 \text{ GPa}}{2(1+0,30)} = 80,8 \text{ GPa}$$

$$G_2 = \frac{E_b}{2(1+\nu_b)} = \frac{100 \text{ GPa}}{2(1+0,34)} = 37,3 \text{ GPa}$$

$$I_1^o = \frac{\pi}{2} r_1^4 = 1,27 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

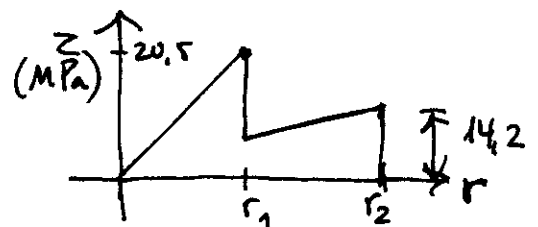
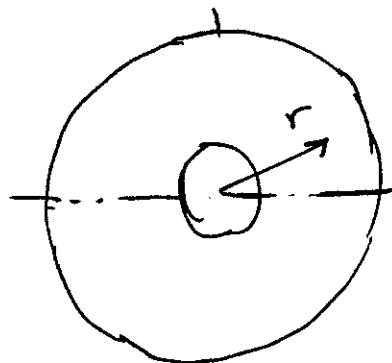
$$I_2^o = \frac{\pi}{2} (r_2^4 - r_1^4) = 5,17 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\theta = \frac{M_t \cdot L}{G_1 I_1^o + G_2 I_2^o} = 8,45 \cdot 10^{-6} \cdot L \text{ rad/[L]}$$

$$M_1 = \frac{G_1 I_1^o}{L} \theta = 869 \text{ N}\cdot\text{m}, \quad M_2 = \frac{G_2 I_2^o}{L} \theta = 1631 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\tau_{max}^a = \frac{M_1}{I_1^o} r_1 = 20,5 \text{ MPa}, \quad \tau_{max}^b = \frac{M_2}{I_2^o} r_2 = 14,2 \text{ MPa}$$

Y la distribución de tensiones constantes (las líneas  
que hay) en una sección cualquiera será



c) Si  $\sigma_e^{ac} = 200 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_e^{br} = 70 \text{ MPa}$ , de acuerdo al criterio de Tresa,  $\sigma_{adm}^{ac} = 100 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{adm}^{br} = 35 \text{ MPa}$

Usando el resultado del apartado b,

$$\text{acero: } \frac{2500 \text{ N}\cdot\text{m}}{20,5 \text{ MPa}} = \frac{M_{adm}^{ac}}{100 \text{ MPa}}, \quad M_{ac}^{adm} = 12195 \text{ N}\cdot\text{m}$$

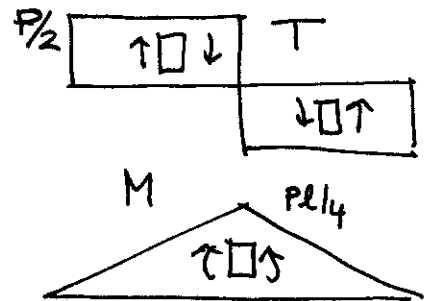
$$\text{bronce: } \frac{2500 \text{ N}\cdot\text{m}}{14,2 \text{ MPa}} = \frac{M_{adm}^{br}}{35 \text{ MPa}}, \quad M_{br}^{adm} = 6162 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Conclusión: el par torsor admisible es  $M_T^{adm} = 6162 \text{ N}\cdot\text{m}$

## QUESTION 2

El diagrama de esfuerzos cortantes es:

y el de momentos flector es:

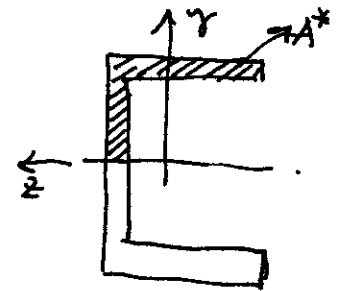


$$T_{\max} = \frac{P}{2} = 1100 \text{ N}$$

$$M_{\max} = \frac{P \cdot L}{4} = 1650 \text{ N}\cdot\text{m}$$

a) Colocando el perfil como indica la foto

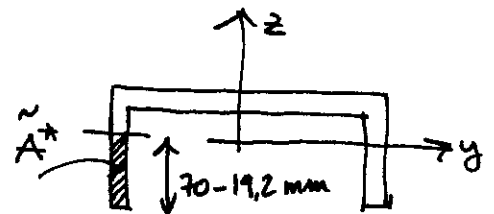
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{1650 \text{ N}\cdot\text{m}}{150 \text{ cm}^3} = 11 \text{ MPa}$$



$$b) \quad z_{\max} = \frac{T_{\max}}{e} \frac{m_z(A^*)}{I_z} = 0,91 \text{ MPa}$$

c) Colocando el perfil girado

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{1650 \text{ N}\cdot\text{m}}{22,4 \text{ cm}^3} = 73,7 \text{ MPa}$$



$$d) \quad z_{\max} = \frac{T_{\max}}{e} \frac{m_y(\tilde{A}^*)}{I_y} = \frac{1100 \text{ N}}{8 \text{ mm}} \cdot \frac{8 \cdot (70-19,2)^2 / 2 \text{ mm}^3}{114 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = 1,24 \text{ MPa}$$

QUESTION 3

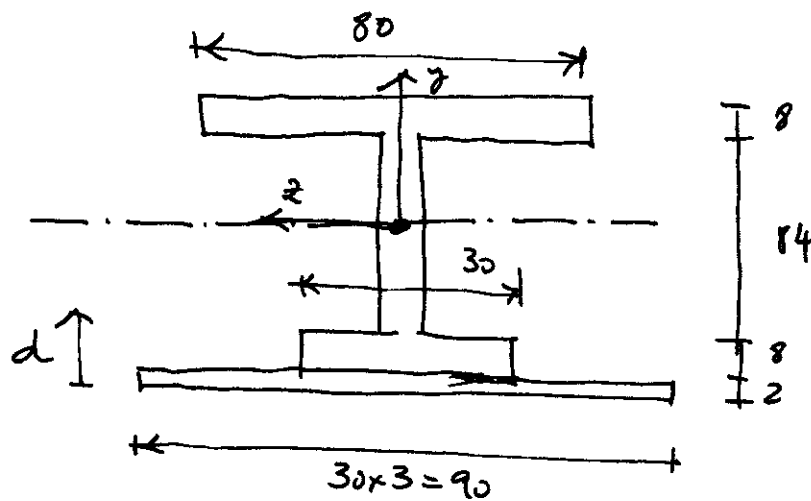
Tomando como referencia el aluminio  $\bar{E} = E_{al} = 70 \text{ GPa}$

Calculamos los factores de ensabado

$$n_{al} = \frac{E_{al}}{\bar{E}} = 1$$

$$n_{ac} = \frac{E_{ac}}{\bar{E}} = 3.$$

y construimos la sección transformada:



a) Posición del eje neutro =

$$d_G = \frac{90 \times 2 \times 1 + 8 \times 30 \times 6 + 84 \times 8 \times 52 + 80 \times 8 \times 98}{90 \times 2 + 8 \times 30 + 84 \times 8 + 80 \times 8}$$

$$= 57,32 \text{ cm}$$

↓ 44,7 cm

b) Momentus medius:

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_z &= \frac{1}{12} 90 \times 2^3 + 90 \times 2 \cdot (d_G - 1)^2 \\
 &+ \frac{1}{12} 30 \times 8^3 + 30 \times 8 \cdot (d_G - 6)^2 \\
 &+ \frac{1}{12} 8 \times 84^3 + 8 \times 84 \cdot (d_G - 52)^2 \\
 &+ \frac{1}{12} 80 \times 8^3 + 80 \times 8 \cdot (d_G - 98)^2 \\
 &= 2,68 \cdot 10^6 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

$$|\sigma_{\max}^{\text{al}}| = \frac{M \cdot n_{\text{al}}}{\tilde{I}_z} |y|_{\max}^{\text{al}} = \frac{650 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot 1}{2,68 \cdot 10^6 \text{ cm}^4} \cdot (d_G - 2) = 13,4 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_{\max}^{\text{ac}}| = \frac{M \cdot n_{\text{ac}}}{\tilde{I}_z} |y|_{\max}^{\text{ac}} = \frac{650 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot 3}{2,68 \cdot 10^6 \text{ cm}^4} d_G = 41,7 \text{ MPa}$$