INDUSTRIALES
ETSII | UPM

**RESISTENCIA DE MATERIALES II**
**EXAMEN DE JUNIO**

**CURSO 2008-09**
**8-6-2009**

**Fecha de publicación de la preacta: 23 de Junio**
**Fecha de revisión del examen: 26 de Junio**

**BLOQUE B**

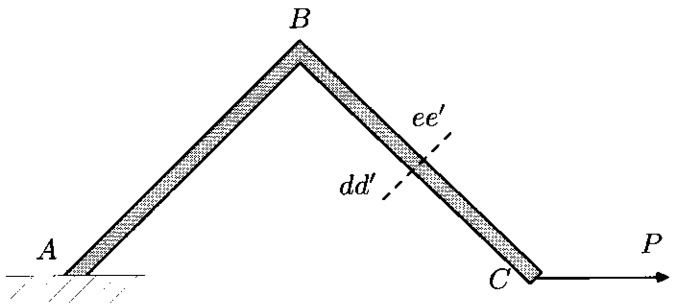
## Cuestión B.1 (3 puntos)

El codo de la figura está formado por dos vigas iguales de longitud $L$ unidas en un ángulo recto y sometidas a una carga puntual $P$ en el extremo libre.

i) Dibuja los diagramas de esfuerzos internos (1P).

ii) Calcula el desplazamiento horizontal del punto $C$ considerando únicamente la deformación por flexión (1P).

iii) Calcula el desplazamiento horizontal adicional del punto $C$ cuando se tiene en cuenta la deformación axial (1P).
(Datos: módulo de Young $E$, área $A$, inercia $I$)



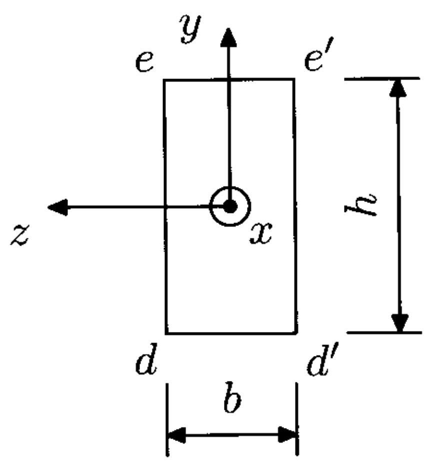

## Cuestión B.2 (3 puntos)

En el codo de la cuestión B.1 se considera la sección $dd'ee'$, situada en la mitad de la barra $BC$ y se define un sistema de coordenadas local indicado en la figura. Sabiendo que la sección es rectangular de dimensiones $b = h/3 = L/60$,

i) Indica en el sistema de coordenadas local la posición del centro de presiones de esta sección (1P).

ii) Calcula la posición del eje neutro de la sección (1P).

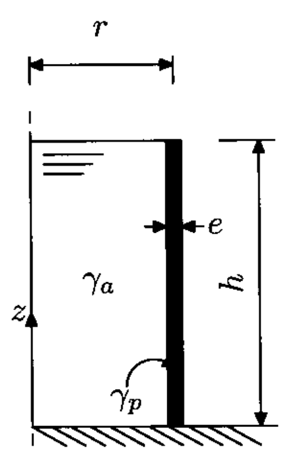
iii) Si $b = 10$ cm, $P = 1500$ N y $E = 210$ GPa, dibuja un diagrama de tensiones normales sobre la sección indicando los mayores valores de las tensiones de tracción y compresión (1P).




## Cuestión B.3 (2 puntos)

Un depósito cilíndrico de pared delgada se encuentra apoyado sobre el terreno. La altura del depósito es $h$, su radio $r$ y contiene un líquido de peso específico $\gamma_a$. Si la pared del depósito tiene espesor $e$ y un peso específico $\gamma_p$ no despreciable, calcular sus tensiones de membrana en función de la altura $z$.

Si $\gamma_p = 15\gamma_a$, determinar el cociente $r/e$ que minimiza la tensión de von Mises en la pared del recipiente.

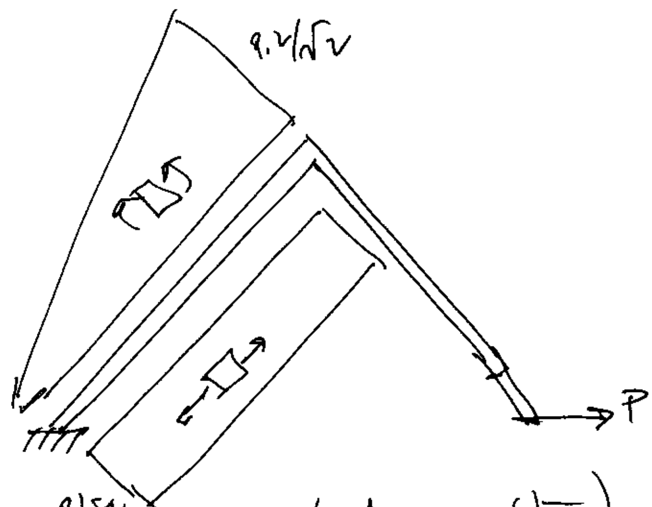



## Cuestión B.4 (2 puntos)

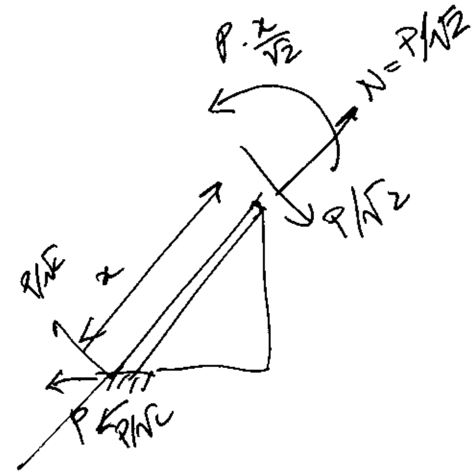
Un viga recta de longitud $L$ y sección uniforme con área $A$ e inercia $I$ se encuentra biempotrada. Si el material de la misma tiene módulo de Young $E$ y coeficiente de dilatación térmica $\alpha$, encuentra la expresión analítica del incremento de temperatura $\Delta T$ que hace pandear a la viga. Calcula el valor de dicho incremento térmico para los datos $I = 25$ cm$^4$, $A = 25$ cm$^2$, $L = 3$ m, $\alpha = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ K$^{-1}$.

# PROBLEMA B.1

1) Diagramas de esfuerzos internos M y N




(esfuerzos simétricos)




2) Desplazamiento horizontal debido sólo al flector

$$\delta_H = 2\cdot\frac{1}{EI}\int_0^L M\, m\, dx = \frac{2}{EI}\int_0^L P\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}\,dx$$

$$= \frac{P}{EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{PL^3}{3EI}$$

, m: ley de flectores para carga puntual horizontal unitaria

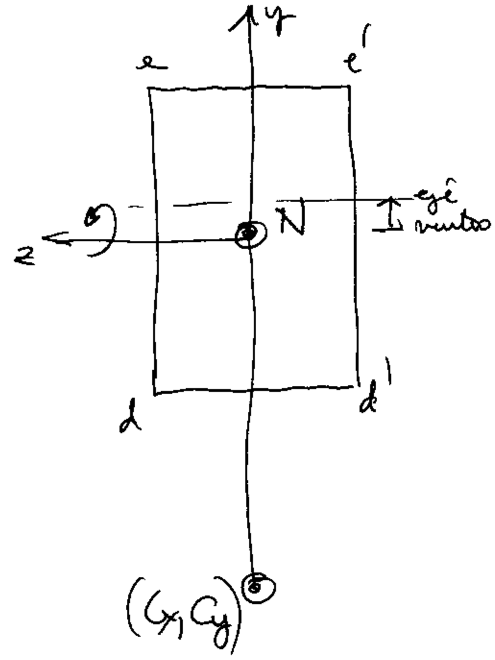
3) Desplazamiento horizontal debido al esfuerzo normal

$$\delta_H = 2\cdot\frac{1}{EA}\int_0^L N\cdot n\, dx = \frac{2}{EA}\int_0^L \frac{P}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{PL}{EA}.$$

n: esfuerzo axial debido a carga horizontal unitaria

PROBLEMA B2

Esfuerzos en la sección ee'dd' : $\begin{cases} N = +P/\sqrt{2} \\ M_z = \dfrac{PL}{2\sqrt{2}} \end{cases}$




i) Posición del centro de presión

$$M_z = N\cdot(-c_y) \Rightarrow \frac{PL}{2\sqrt{2}} = \frac{+P}{\sqrt{2}}(-c_y)$$

$$\Rightarrow \boxed{c_y = -\frac{L}{2}}$$

$c_x = 0$ porque $M_y = 0$.

ii) Eje neutro de la sección

Imponemos $\sigma_x = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{M_z}{I_z} y + \dfrac{N}{A} = 0$

$$\Rightarrow -\frac{PL/2\sqrt{2}}{I_z}\cdot y + \frac{P/\sqrt{2}}{A} = 0$$

$$y = \frac{I_z}{A}\frac{2}{L} = \frac{1/12\, b h^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{b}\cdot\cancel{h}}\,\frac{\cancel{2}}{\cancel{20}_{10}\, h} = \frac{h}{120}$$

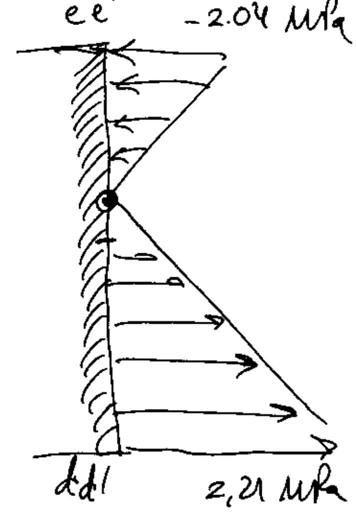
iii) Diagrama de tensiones normales

$$\sigma_x^{max} = -\frac{M_z}{I_z}\cdot\left(-\frac{h}{2} - \frac{h}{120}\right) + \frac{P}{A}$$

$$= 2{,}21 \text{ MPa}$$

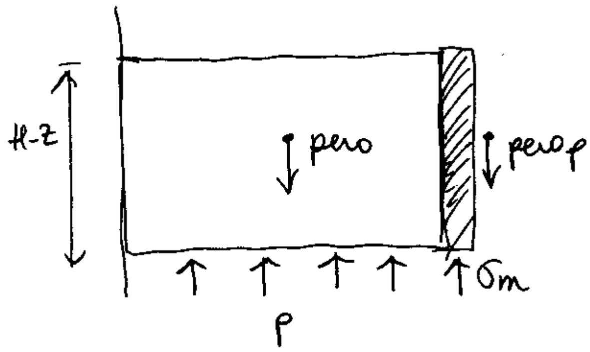
$$\sigma_x^{min} = -\frac{M_z}{I_z}\left(\frac{h}{2} - \frac{h}{120}\right) + \frac{P}{A}$$

$$= -2{,}04 \text{ MPa}$$



PROBLEMA B.3

Equilibri vertical




$$\gamma_a \pi R^2 (H-z) + 2\pi R e \gamma_p (H-z) = \gamma_a \pi R^2 (H-z) + \sigma_m 2\pi R e$$

$$\boxed{\sigma_m = \gamma_p (H-z)}$$

Equilibri circumferencial (fórmula de Laplace)

$$\cancel{\frac{\sigma_m}{\rho_m}}^{0} + \frac{\sigma_c}{\rho_c} = \frac{p}{e} \quad (\rho_m = \infty) \quad , \quad \boxed{\sigma_c = \gamma_a (H-z) \frac{R}{e}}$$

Cociente R/e óptimo

$$\text{si } \gamma_p/\gamma_a = 15 \quad \begin{cases} \sigma_m = 15\,\gamma_a (H-z) \\ \sigma_c = \gamma_a (H-z) \frac{R}{e} \end{cases}$$

Como las tensiones de membrana son principales

$$\sigma_{eq}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_m - \sigma_c)^2 + \sigma_m^2 + \sigma_c^2} = \frac{\gamma_a (H-z)}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(15 - \frac{R}{e}\right)^2 + 15^2 + \left(\frac{R}{e}\right)^2}$$

Llamando $\lambda = \frac{R}{e}$ y minimizando $f(\lambda) = (15-\lambda)^2 + 15^2 + \lambda^2$

obtenemos $f'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 15 \Leftrightarrow \boxed{R = 15e}$

# PROBLEMA B.4

Debido a un incremento térmico y una fuerza de compresión N, la deformación longitudinal de una viga es:

$$\Delta L = \alpha L \Delta T - N \frac{L}{EA}$$

Como la viga está biempotrada $\Delta L = 0$ y

$$N = \alpha \Delta T EA$$

La fuerza que hace pandear una viga biempotrada es: $P_{crit} = \dfrac{\pi^2 EI}{(0{,}5\, L)^2}$

Igualando $P_{crit} = N$, obtenemos $\Delta T = \dfrac{\pi^2 I}{0{,}5^2 L^2 \alpha A}$.

Para los valores: $I = 25\ cm^4$, $A = 25\ cm^2$, $L = 300\ cm$

$\alpha = 1{,}4 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$

$$\boxed{\Delta T = 31{,}33\ ^\circ C}$$