

## SOLUCIÓN

### SOLUCIÓN PROBLEMA 1 - RESISTENCIA DE MATERIALES II - 27/1/2011

Un recipiente cilíndrico vacío de radio  $r$  y espesor  $e$  se hunde en el mar.

- a) Calcula las tensiones de membrana en la pared del depósito en función de la profundidad  $z$  del centro de gravedad del recipiente (suponer que  $z$  es mucho mayor que el radio y longitud del recipiente) (3P).
- b) Dibuja un diagrama de Mohr del estado tensional tridimensional obtenido en el apartado anterior (2P).
- c) Calcula la profundidad a la que el material falla según el criterio de Tresca (3P).

Datos: Peso específico  $\gamma$ , límite elástico  $\sigma_e$ .

- a) En un recipiente sumergido la presión hidrostática  $p = \gamma z$  actúa por igual sobre todas las caras externas del mismo. Considerando un corte como el de la figura y planteando el equilibrio de fuerzas en la dirección del eje de revolución del cilindro se obtiene el valor de la tensión de membrana meridional:

$$\sigma_m 2\pi r e = p \pi r^2 \Rightarrow \sigma_m = \frac{pr}{2e} .$$

La dirección de esta tensión es la que se indica en la figura, que es de compresión.

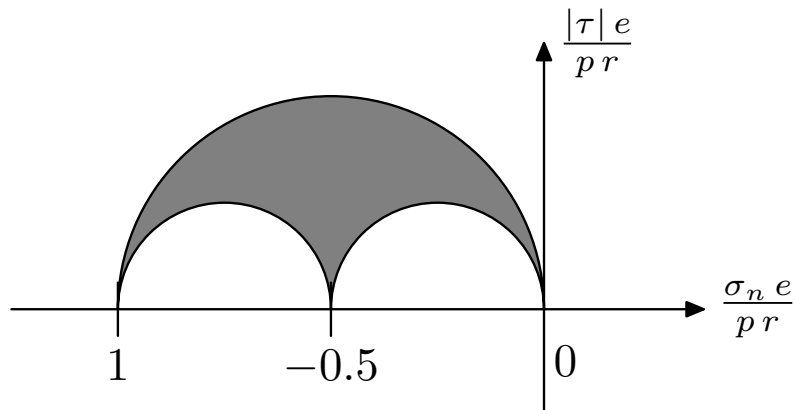
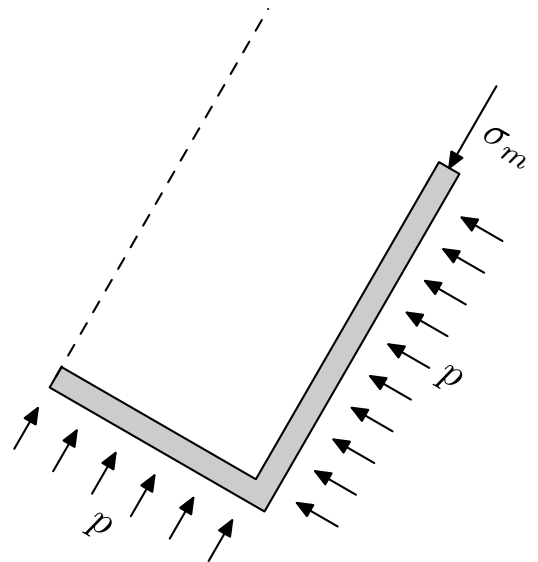
Empleando la ecuación de Laplace para el equilibrio de membranas de revolución, y sustituyendo  $\rho_m = \infty, \rho_c = r$  resulta

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_c}{\rho_c} = \frac{-p}{e} \Rightarrow \sigma_c = \frac{-pr}{e} ,$$

es decir, que la tensión circunferencial  $\sigma_c$  también es de compresión. Concluimos que las dos tensiones de membrana en la pared del recipiente son:

$$\sigma_m = \frac{\gamma z r}{2e} \text{ (de compresión) , } \quad \sigma_c = \frac{\gamma z r}{e} \text{ (de compresión) .}$$

- b) Dos tensiones principales en la pared del recipiente son las tensiones de membrana  $\sigma_m, \sigma_c$  y la tercera tensión principal es  $\sigma_1 = 0$ . En la siguiente figura se dibuja el diagrama de Mohr correspondiente con la escala de los ejes adimensionalizada.

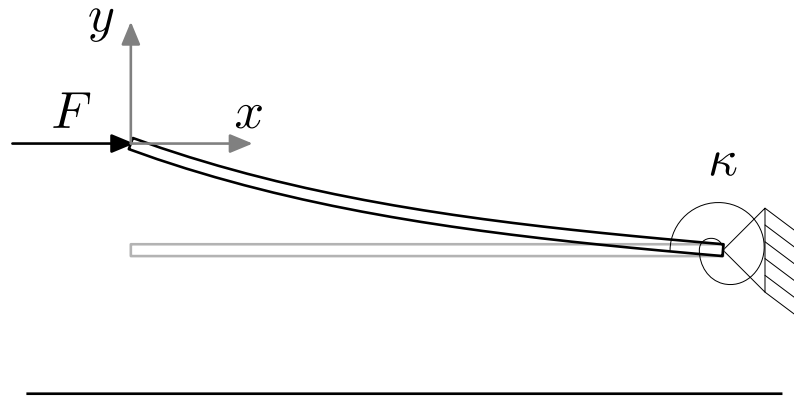


c) Según el criterio de Tresca, el material del recipiente falla cuando la tensión tangencial máxima alcanza el valor  $\sigma_e/2$ . Como el valor máximo de la tensión tangencial es igual al radio del mayor círculo de Mohr se obtiene que el fallo ocurre cuando se cumple:

$$|\tau|_{max} = \frac{\gamma z r}{2e} = \frac{\sigma_e}{2} \Rightarrow z = \frac{\sigma_e e}{\gamma r} .$$

SOLUCIÓN PROBLEMA 2 - RESISTENCIA DE MATERIALES II - 27/1/2011

Calcula la ecuación algebraica (no la ec. diferencial) que define la carga crítica de pandeo del sistema de la figura (6P). Comprobar que cuando  $\kappa$  es muy grande, se recupera el valor de la carga crítica de una columna empotrada (1P).

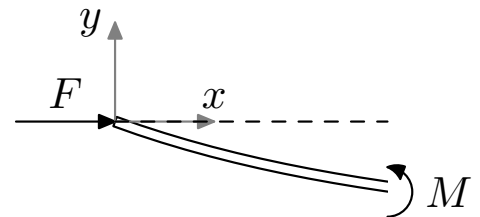


A partir del equilibrio de la figura se obtiene la ley de esfuerzos flectores en la viga:

$$M(x) = -F v(x) , \quad (1)$$

y de ésta última, la ecuación diferencial de la elástica:

$$v'' + \frac{F}{EI} v = 0 , \quad (2)$$



siendo  $EI$  la rigidez a flexión de la viga.

Si llamamos  $L$  a la longitud de la viga, y teniendo en cuenta el efecto del muelle torsional en  $x = L$ , las condiciones de contorno para este problema se pueden escribir como:

$$M(0) = 0 , \quad M(L) = -\kappa \theta(L) . \quad (3)$$

La solución general de la ecuación diferencial (1) es

$$v(x) = A \cos \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right) + B \sin \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right) , \quad (4)$$

siendo  $A$  y  $B$  dos constantes. Para poder utilizar las condiciones de contorno empleamos las relaciones

$$\begin{aligned} M(x) &= EI v''(x) = -A F \cos \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right) - B F \sin \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right) \\ \theta(x) &= v'(x) = -A \sqrt{\frac{F}{EI}} \sin \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right) + B \sqrt{\frac{F}{EI}} \cos \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right) \end{aligned} \quad (5)$$

De la primera condición de contorno se sigue que  $A = 0$ . De la segunda, o bien  $B = 0$ , o bien

$$\tan \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} L \right) = \frac{\kappa}{\sqrt{F EI}} . \quad (6)$$

Las soluciones a esta ecuación proporcionan todas las cargas de pandeo de la viga.

Si la viga está empotrada en su extremo derecho, esto es equivalente a suponer que la rigidez del muelle torsional es infinita. Si  $\kappa \rightarrow \infty$ , la ecuación (6) se simplifica a

$$\tan \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} L \right) \rightarrow \infty , \quad (7)$$

cuyas soluciones son

$$\sqrt{\frac{F}{EI}} L = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow F = \frac{(\pi + 2n\pi)^2 EI}{4L} . \quad (7)$$

La carga crítica corresponde a la menor carga de pandeo ( $n = 0$ ) que es  $F = \frac{\pi^2 EI}{4L}$  y que coincide con la carga crítica de una columna empotrada-libre.